UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA
INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO

DETERMINAÇÃO DE TERMOS ROTACIONAIS DA RESPOSTA DINÂMICA POR TÉCNICAS DE ANÁLISE MODAL

Diogo Coelho de Carvalho Montalvão e Silva
(*Licenciado em Engenharia Mecânica*)

Dissertação para obtenção do grau de
Mestre em Engenharia Mecânica

Orientador

Doutor António Manuel Relógio Ribeiro

Júri

Presidente:	Doutor Nuno Manuel Mendes Maia
Vogais:	Doutor José Fernando Dias Rodrigues
	Doutor António Manuel Relógio Ribeiro

Outubro de 2003

ERRATA

Pág.	Linha	Onde se lê:	Deve ler-se:
1	19	"(...) ventos moderados na ordem dos 76 km/h."	"(...) ventos moderados na ordem dos 67 km/h."
7	17	"(...) no mesmo mês em que esta dissertação foi concluída (...)"	"(...) no mesmo mês em que se concluiu a escrita desta dissertação (Julho) (...)"
9	8	"A discussão da metodologia aqui apresentada (...)"	*parágrafo, 4ª tópico*: "• A discussão da metodologia apresentada na secção precedente (...)"
	11	"Introduzida a metodologia (...)"	*parágrafo, 5ª tópico*: "• Introduzida a metodologia (...)"
10	20	"O modelo espacial descrito por estas matrizes constitui um problema de valores e vectores próprios (...)"	"A partir do modelo espacial descrito por estas matrizes consegue-se constituir um problema de valores e vectores próprios (com $\{f\}=\{0\}$) (...)"
43	18	"(...) que corresponde há (...)"	"(...) que corresponde à (...)"
81	22	"(...) observa-se que μ_{12} não é afectada por m_3 assim como μ_{23} não é afectada por m_1."	"(...) observa-se que μ_{12} só é afectada por m_3 assim como μ_{23} só é afectada por m_1."
89	12	"(...) a matriz $\lfloor H^{(A)} \rfloor = \lfloor H^{(T_2)} \rfloor$ (...)"	"(...) a matriz $\lfloor H^{(A)} \rfloor = \lfloor H^{(T_1)} \rfloor$ (...)"
92	1	$T=\frac{1}{2}\{\dot{q}\}[M]\{\dot{q}\}$	$T=\frac{1}{2}\{\dot{q}\}^T[M]\{\dot{q}\}$
	2	$V=\frac{1}{2}\{q\}[K]\{q\}$	$V=\frac{1}{2}\{q\}^T[K]\{q\}$
111	3	"I_{T2}-I_{T1}, m_T, I_{T1} (ordem adoptada em 3.4);"	"I_{T2}-I_{T1}, m_T, I_{T1};"
	4	"I_{T2}-I_{T1}, I_{T1}, m_T;"	"I_{T2}-I_{T1}, I_{T1}, m_T (ordem adoptada em 3.4);"
147	38	"Silva, J. M. S."	"Silva, J. M. M."
148	8		
149	17		

Montalvão e Silva, D. C. C., "Determinação de Termos Rotacionais da Resposta Dinâmica por Técnicas de Análise Modal", Dissertação para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Mecânica, Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa, Portugal, Outubro de 2003.

Título: **Determinação de Termos Rotacionais da Resposta Dinâmica por Técnicas de Análise Modal**

Nome: **Diogo Coelho de Carvalho Montalvão e Silva**

Mestrado em: **Engenharia Mecânica**

Orientador: **Prof. Doutor Eng^{o} António Manuel Relógio Ribeiro**

Provas concluídas em:

RESUMO

A resposta dinâmica de uma estrutura pode ser descrita em termos de coordenadas de translação e rotação. As últimas não são frequentemente consideradas atendendo às dificuldades na aplicação de momentos puros e na medição de rotações. Contudo, em geral, isso implica uma redução na descrição matemática dos sistemas que pode ir até 75%. Por outro lado, os termos rotacionais são essenciais para prever a resposta de sistemas cujos momentos de inércia tenham sido modificados. Num método, o mais referenciado na literatura, é aplicada uma força na extremidade de um bloco em forma de T que está acoplado à estrutura, o que provoca um momento e uma força na sua ligação. Este bloco permite ainda medir deslocamentos angulares. Geralmente, os resultados são desencorajadores. Neste trabalho, desenvolve-se um método alternativo baseado em técnicas de acoplamento em que se estimam termos rotacionais sem que seja necessária a aplicação de um momento, introduzindo-se uma modificação estrutural que se obtém pela rotação de um bloco em forma de T. A força, é aplicada no seu centróide. Alguns exemplos numéricos e experimentais são apresentados de modo a ilustrar o procedimento, procedendo-se à sua discussão de modo a verificar as vantagens do método e evidenciar as dificuldades que surgem na sua aplicação prática.

PALAVRAS-CHAVE

Rotações, Cancelamento de Massa, Acoplamento, Resposta Dinâmica, Análise Modal, Medições por LASER.

Title: **Determination of Rotational Terms of the Dynamic Response by means of Modal Analysis Techniques**

ABSTRACT

The dynamic response of a structure can be described by both its translational and rotational receptances. The latter ones are frequently not considered because of the difficulties in applying a pure moment excitation or in measuring rotations. However, in general, this implies a reduction up to 75% of the complete model. On the other hand, if a modification is to include a rotational inertia, the rotational receptances of the unmodified system are needed. In one method, more commonly found in the literature, a so called T-block is attached to the structure. Then, a force, applied to an arm of the T-block, generates a moment together with a force at the connection point. The T-block also allows angular displacement measurements. Nevertheless, the results are often discouraging. In this work, an alternative method, based in coupling techniques, is developed, in which rotational receptances are estimated without the need of applying a moment excitation. This is accomplished by introducing a rotational inertia modification when rotating the T-block towards its centre. The force is then applied in its centroid. Several numerical and experimental examples are discussed so that the methodology can be clearly described. The advantages and limitations are identified within the practical application of the method.

KEYWORDS

Rotational Degrees of Freedom (RDOF's), Mass Cancellation, Coupling, Dynamic Response, Modal Analysis, LASER Measurement.

AGRADECIMENTOS

O autor gostaria de manifestar os agradecimentos a todos os que, de algum modo, contribuíram directa ou indirectamente para a elaboração do trabalho envolvido em torno da presente dissertação. Não sendo possível mencionar todos, destacam-se os seguintes:

O Prof. António Relógio Ribeiro, a quem se deve a ideia original, cuja incansável e enérgica colaboração ultrapassou largamente a de orientador;

O Prof. João Duarte Silva pela constante preocupação, motivação e aposta neste trabalho;

O Prof. Nuno Maia pelos indispensáveis conselhos e orientações de índole cientifica;

A Prof.ª Paula Silva e os Eng.ˢ Mihail Fontul e Fernando Oliveira pela ajuda imensa, por estarem sempre disponíveis e pelas muitas provas de amizade;

Os docentes da Área Cientifica de Mecânica dos Meios Sólidos do Departamento de Engenharia Mecânica da Escola Superior de Tecnologia do Instituto Politécnico de Setúbal, por todo o apoio com que fui inúmeras vezes gratificado;

O Prof. Júlio Montalvão e Silva por tudo aquilo que me lembro e por tudo aquilo de que só mais tarde me virei a aperceber;

A Dr.ª Isabel Montalvão e Silva por me ter acompanhado com tanta dedicação, empenho e ânimo, incentivos sem os quais dificilmente conseguiria conquistar este desafio.

LISTA DE ABREVIATURAS E NOMENCLATURA

A	Subestrutura
AC	Corrente Alterna
B	Subestrutura (junta)
B&K	Brüel & Kjær
C	Estrutura composta por A e B
CB	Célula de Bragg
DC	Corrente Contínua
DF	Divisor de Feixe
DFP	Divisor de Feixe Polarizador
EIDV	*Effective Independence Distribution Vector*
FD	Fotodíodo
FRC	Função de Resposta Característica
FRF	Função de Resposta em Frequência
He-Ne	Hélio-Neon
MEF	Método dos Elementos Finitos
MEMS	*Micro Electro-Mechanical Systems*
L	Lente
LASER	*Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation*
LVDT	*Linear Variable Differential Transformer*
M	Espelho
O	Subestrutura simples da qual se pretende determinar o termo rotacional $H_{\theta\theta}$
P	Placa
RVDT	*Rotary Variable Differential Transformer*
SDM	*Structural Dynamic Modification*
T_1,T_2	Estrutura composta pelas subestruturas simples ‘O’, transdutor de forças e bloco em forma de T com momento de inércia I_{T1} / I_{T2}

SIMBOLOGIA E NOTAÇÃO

$A(\omega)$	Acelerância
A_{med}	Acelerância efectivamente medida
A_{real}	Acelerância real da estrutura se não houvesse inércia adicional
${}_r\overline{A}_{jk}$	Constante modal complexa do modo r para resposta na coordenada j e solicitação na coordenada k
${}_rA_{jk}$	Módulo da constante modal ${}_r\overline{A}_{jk}$
b	Largura (m)
$[C]$	Matriz de amortecimento viscoso
$[D]$	Matriz de amortecimento histerético
e_1,e_2	Braço da força descentrada aplicada no bloco em forma de T (m)
E,E^*	Módulo de Young / Módulo de Young complexo (Pa)
f	Frequência (Hz)
f_0	Frequência de transporte (Hz)
f_{vib}	Frequência da vibração (rad/s)
$f_k, f_k(t)$	Força na coordenada k (N)
f_{real}	Força real que seria aplicada se não houvesse inércia adicional (N)
f_{med}	Força efectivamente medida pelo transdutor de força (N)
F, F_k	Amplitude genérica da solicitação / Amplitude da solicitação na coordenada k
$\{f\}$	Vector de forças
G,G^*	Módulo de elasticidade transversal / Módulo de elasticidade transversal complexo (Pa)
h	Espessura (m)
$[H],[H(\omega)]$	Matriz de mobilidade genérica
H_{jk}	Termo da matriz de mobilidade genérica $[H]$ que relaciona resposta na coordenada j com solicitação na coordenada k
$[H^{(\ )}]$	Matriz de mobilidade genérica da estrutura ( )
$H_{jk}^{(\ )}$	Termo da matriz de mobilidade genérica $[H]$ da estrutura ( ) que relaciona resposta na coordenada j com solicitação na coordenada k
$[H_{jk}^{(\ )}]$	Matriz de mobilidade genérica entre as coordenadas j e k da estrutura ( )

i	Índice genérico / Coordenadas exclusivas da subestrutura *A*
$i^2 = -1$	Unidade imaginária
$i_{det}(t)$	Intensidade resultante no fotodíodo FD (A)
$\hat{i}$	Amplitude da componente AC da intensidade $i_{det}(t)$ (A)
I	2º momento de área genérico (m^4) / Momento de inércia genérico (kg/m^2)
I_B	Momento de inércia genérico a cancelar (kg/m^2)
I_{DC}	Componente DC da intensidade $i_{det}(t)$ (A)
I_{T1},I_{T2}	Momento de inércia do conjunto formado pelo bloco em forma de T e transdutor de forças (estrutura T_1 / T_2) (kg/m^2)
$[I]$	Matriz Identidade
j	Índice genérico / Coordenadas comuns às subestruturas *A* e *B*
k	Índice genérico / Coordenadas exclusivas da subestrutura *B* (junta) / Constante de rigidez (N/m)
k^*	Constante de rigidez complexa (N/m)
K	Coeficiente de corte da equação de Timoshenko
$[K]$	Matriz de rigidez
l	Comprimento (m)
LB_{het}	Largura de banda do sinal heterodinado (rad/s)
m	Massa genérica (kg)
m_B	Massa genérica a cancelar (kg)
m_F	Massa do transdutor de força (kg)
m_r	Massa modal *r* (kg)
m_T	Massa conjunta do bloco em forma de T e do transdutor de força (kg)
m_θ	Momento devido à força descentrada aplicada no bloco em forma de T (Nm)
M_{jk}^R	Residual mássico de uma FRF genérica H_{jk}
$[M]$	Matriz de massa
n	Número de anti-ressonâncias de uma FRF genérica H_{jk}
N	Número de graus de liberdade
$q_i, \{q\}$	Coordenada generalizada / Vector de deslocamentos generalizados
$\dot{q}_i, \{\dot{q}\}$	Velocidade generalizada na coordenada q_i / Vector de velocidades generalizadas
Q_i	Força generalizada na coordenada q_i
r	Número do modo de vibração

R_{jk}^{R}	Residual rígido de uma FRF genérica H_{jk}
$2s$	Distância entre as coordenadas de translação x_A e x_B (m)
S	Área da secção transversal (m^2)
t	Tempo (s)
T	Energia cinética (J)
V	Energia potencial (J)
x, $x(t)$	Coordenada de translação / Posição (m)
$x_j, x_j(t)$	Variável genérica / Coordenada de translação genérica / Deslocamento na coordenada j (m)
x_A	Coordenada de translação onde o canal A do transdutor LASER mede
x_B	Coordenada de translação onde o canal B do transdutor LASER mede
$\{x\}$	Vector de deslocamentos
$\dot{x}(t)$	Velocidade (m/s)
$\ddot{x}$	Aceleração (m/s^2)
$X, \overline{X}_j$	Amplitude genérica da resposta / Amplitude complexa da resposta na coordenada j (*phasor*)
$\ddot{X}$	Amplitude genérica da aceleração (m/s^2)
y	Deflexão (m)
$Y(\omega)$	Mobilidade
$Y_{real}(\omega)$	Mobilidade real
$Y_{aparente}(\omega)$	Mobilidade aparente (projecção de $Y_{real}(\omega)$ num eixo)
$[Z],[Z(\omega)]$	Matriz de rigidez dinâmica
$[Z^{(\,)}]$	Matriz de rigidez dinâmica da estrutura ( )
$[\alpha],[\alpha(\omega)]$	Matriz de receptância
$\alpha_{jk}(\omega)$	Termo da matriz de receptância $[\alpha(\omega)]$ que relaciona deslocamento na coordenada j com solicitação na coordenada k
$[\alpha^{(\,)}]$	Matriz de receptância da estrutura ( )
$[\alpha_{jk}^{(\,)}]$	Matriz de receptância entre as coordenadas j e k da estrutura ( )
$\beta(\omega^2)$	Função de Resposta Característica (FRC)
Δf , $\Delta f(t)$	Desvio de Doppler da frequência (rad/s)
φ	Ângulo de fase genérico (rad)

φ_0	Ângulo de fase inicial (rad)
φ_m	Ângulo de fase modulado (rad)
$_r\varphi_{jk}$	Fase da constante modal $_r\overline{A}_{jk}$ (rad)
ϕ_{jr}	Elemento *j* do vector modal $\{\Phi_r\}$
γ	Coordenada de rotação
η_r	Coeficiente de amortecimento histerético do modo *r*
η_E	Coeficiente de amortecimento histerético para o módulo de Young complexo E^*
η_G	Coeficiente de amortecimento histerético para o módulo elasticidade transversal G^*
λ	Comprimento de onda (m)
λ_r	Frequência natural amortecida do modo *r* (rad/s)
μ_{jk} , $\mu_{jk,a}$	Frequência da anti-ressonância *a* de uma FRF genérica H_{jk} (rad/s)
υ	Coeficiente de Poisson
θ	Ângulo genérico (rad) / Coordenada de rotação / Deslocamento angular (rad)
$\ddot{\theta}$	Aceleração angular (rad/s^2)
ρ	Massa específica (kg/m^3)
τ, τ'	Tolerância ao erro
ω	Frequência (rad/s)
ω_r	Frequência natural não-amortecida do modo *r* (rad/s)
$[\Psi], \{\Psi_r\}$	Matriz / Vector modal *r*
$[\Phi], \{\Phi_r\}$	Matriz / Vector modal *r* (normalizado à massa)
[ ]	Matriz
{ }	Vector
| |	Módulo
$arg(\ )$	Argumento de um número complexo
$Real(\ )$	Parte real de um número complexo
$Imag(\ )$	Parte imaginária de um número complexo
$\oplus$	Operador de acoplamento

ÍNDICE

1. INTRODUÇÃO

«This book of mine has little need of preface, for indeed it is "all preface" from beginning to end.»

D'Arcy Wentworth Thompson (1860-1948) - "Growth and Form"

1.1. PREÂMBULO

O estudo do comportamento dinâmico de estruturas tem vindo a assumir um papel cada vez mais importante na engenharia nas últimas décadas, destacando-se em diversas áreas, nomeadamente, modificação estrutural, manutenção condicionada, resposta sísmica de edifícios, aerodinâmica, projecto à fadiga, detecção de dano, conforto, segurança, etc.

O primeiro fenómeno em que se pensa naturalmente quando se fala de resposta dinâmica de uma estrutura é a ressonância, que tem sido considerada como uma das mais graves e mais severas causas de ruína das estruturas solicitadas dinamicamente. Um exemplo várias vezes discutido e referenciado na literatura académica é a ruína da Ponte de Tacoma. Esta ponte, aberta ao tráfego no dia 1 de Julho de 1940, fazia a ligação entre Tacoma e Gib Harbor sobre o rio Narrows no estado de Washington nos Estados Unidos da América. Era conhecida como a *Galloping Gertie* devido à sua elevada flexibilidade (era perfeitamente perceptível um modo de flexão, segundo relatos de alguns condutores). Passados 4 meses da sua inauguração, no dia 7 de Novembro de 1940, a ponte ruiu quando sujeita a ventos moderados na ordem dos 76 km/h. Ao fim de algum tempo, a amplitude da oscilação tornou-se tão grande que o limite de resistência à fadiga dos materiais foi ultrapassado, provocando a destruição do tabuleiro da ponte. Billah e Scanlan [1] demonstram que o que conduziu à sua ruína não está simplesmente relacionado com o fenómeno de ressonância, partindo da premissa que a frequência de Strouhal de oscilação da ponte não coincidia com uma ressonância do sistema e concluindo que a causa da ruína da ponte terá estado relacionada com um fenómeno designado por auto-excitação ou auto-sustentação[1]. Contudo, é evidente que os conhecimentos em engenharia da época, nomeadamente no que diz respeito ao comportamento dinâmico de estruturas, não eram ainda suficientes para prever o desfecho trágico que se veio a registar, que felizmente não causou mais que danos materiais.

Pode portanto dizer-se que o estudo da resposta dinâmica de estruturas e a sua inclusão no ciclo de projecto, evoca dois dos fins mais nobres da engenharia: contribuir na prevenção de tragédias humanas e de catástrofes económicas.

1.2. OBJECTIVOS

Determinar o comportamento dinâmico de sistemas complexos por modelação numérica, nomeadamente por utilização do Método dos Elementos Finitos (MEF), é uma solução potencialmente vantajosa, mas que, ainda hoje, se apresenta como sendo difícil, trabalhosa e de fiabilidade incerta, principalmente quando na presença de juntas [3]. Em grande parte dos casos a via experimental parece oferecer boas contrapartidas.

Um dos modelos matemáticos utilizados na caracterização dinâmica de estruturas relaciona o seu movimento, que se pode descrever em termos de deslocamento, velocidade ou aceleração, com uma solicitação. Pode decompor-se um movimento genérico em componentes lineares (translação) e angulares (rotação). No que diz respeito à solicitação, esta poder-se-á decompor em forças e momentos. Deste modo, podem ser consideradas relações entre movimentos rectilíneos e forças, movimentos angulares e momentos, movimentos rectilíneos e momentos e movimentos angulares e forças. Os instrumentos de medida utilizados actualmente permitem obter a relação entre translações e forças com precisão bastante satisfatória. As outras relações não são muitas vezes consideradas, por ser difícil medir, em certos casos, as rotações e ser difícil aplicar, na maior parte dos casos,

[1] Um sistema denomina-se auto-excitado ou auto-sustentado por ser o movimento em si que gera a força de excitação [2]. Por outras palavras, a força excitadora $f(t)$ está acoplada à resposta do sistema dependendo explicitamente do deslocamento $x(t)$, velocidade $\dot{x}(t)$ ou aceleração $\ddot{x}(t)$: $f(t) = f\left[x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t)\right]$. Nestas condições, também é usual dizer-se que os sistemas têm amortecimento negativo.

momentos puros. Demonstrar-se-á adiante que, no limite e considerando apenas translações e forças, a informação de que se dispõe corresponde a apenas 33% do modelo que descreve dinamicamente o comportamento do sistema (note-se que, no caso de sistemas não recíprocos, esta percentagem se reduzirá para apenas 25%). Nesses casos, os modelos são incompletos, e embora esta informação seja muitas vezes desprezada, o conhecimento da resposta dinâmica em termos angulares é potencialmente útil na detecção de dano, em acoplamento de estruturas e quando se introduzem modificações estruturais que afectem os momentos de inércia dos sistemas.

É nesta perspectiva que este trabalho surge, tendo como objectivo estudar um método expedito que permita estimar experimentalmente termos rotacionais sem que seja necessário solicitar as estruturas com momentos, evitando-se os problemas que daí advêm. Este método basear-se-á na utilização de técnicas de acoplamento, provocando-se uma modificação estrutural que se obtém pela rotação de um bloco em forma de T.

1.3. IMPORTÂNCIA DOS GRAUS DE LIBERDADE ROTACIONAIS EM ANÁLISE MODAL

É hoje sabido que os graus de liberdade rotacionais são essenciais em inúmeras situações de engenharia que lidem com a resposta dinâmica de estruturas. Do ponto de vista matemático, já abordado na secção anterior, o desconhecimento desta informação pode representar cerca de 70% do modelo completo [4][5]. Como consequência, em situações de acoplamento de estruturas, a não inclusão de rotações, conduz em geral a resultados sem sentido mesmo em FRF's que relacionam apenas termos de translação [6][7]. Por outro lado, a inclusão de graus de liberdade rotacionais em análises estruturais pode fazer a diferença entre um bom e um mau modelo. Já em 1984 Smiley e Brinkman [8] diziam que até mesmo as estruturas mais simples são muitas vezes difíceis de modelar correctamente sem incorporar graus de liberdade rotacionais.

Também no campo da modificação estrutural dinâmica (SDM)[2] as rotações desempenham um papel importante. Soyster e Trethewey [9] estabelecem a ponte entre o MEF e a

[2] O acrónimo inglês SDM é utilizado para descrever *Structural Dynamic Modification*.

experimentação, mostrando que desde que os modos rotacionais experimentais possam ser adquiridos com qualidade, a utilização de elementos de viga na SDM conduz de forma eficaz à obtenção de bons resultados. A análise modal experimental tem vindo a fazer parte integrante do ciclo de projecto moderno, nomeadamente nas industrias automóvel e aeroespacial. Os dados experimentais podem ser adquiridos num protótipo para corrigir e ajustar o MEF, que uma vez verificado, pode ser usado para avaliar alterações de projecto (*updating*). Segundo estes autores, também nesta área o reconhecimento de termos rotacionais se revela indispensável.

Do ponto de vista experimental, o uso combinado de translações e rotações permite reduzir o número de medições necessário para reproduzir os modos de vibração com uma precisão semelhante àquela que seria obtida incluindo apenas medições de translação [10].

1.4. REVISÃO DO ESTADO ACTUAL DOS CONHECIMENTOS

O problema de determinar FRF's rotacionais pode ser separado em dois subproblemas:

- Medição de rotações;
- Solicitação com momentos puros e medição do seu valor.

O primeiro é de resolução relativamente fácil, e nem sempre conduz a maus resultados. Podem encontrar-se várias formas alternativas para o fazer. Pode recorrer-se à utilização de transdutores específicos para o efeito, mas que têm a desvantagem de ser de custo mais elevado que os transdutores convencionais [11]. Um método bastante referenciado na literatura, por exemplo em [4][6][11]-[16], baseia-se na utilização de um dispositivo que permite medir as translações em dois pontos convenientemente afastados que se convertem em rotações por recurso a simples relações geométricas. Numa técnica diferente, Cafeo, Trethewey e Sommer [10] medem, sem contacto físico, simultaneamente uma translação e duas rotações de uma superfície em vibração. Bokelberg, Sommer e Trethewey [17][18] desenvolveram um transdutor multidireccional que permite medir os 6 graus de liberdade num ponto (3 translações e 3 rotações) utilizando 3 velocímetros LASER apontados a um alvo tetraédrico colocado na estrutura. No entanto, este sistema é pouco portátil como consequência das suas dimensões. Também foi desenvolvido, ao abrigo de um projecto financiado pela União Europeia (contrato Brite Euram PR-CT97-0540 [19]), um transdutor multidireccional que permite medir os 6 graus de liberdade num ponto, sendo constituído por 6 acelerómetros dispostos convenientemente numa configuração triangular. Neste mesmo trabalho podem encontrar-se outras soluções alternativas para a medição de rotações, das quais se destaca a utilização de um transdutor LASER que, sem ter contacto físico, permite varrer uma determinada área da estrutura ao longo de uma linha recta ou de linhas circulares, o que possibilita calcular as deformadas associadas aos modos e extrair as respostas em mais do que um grau de liberdade simultaneamente. Ewins utiliza uma abordagem semelhante em [20].

O equipamento LASER tem tido cada vez maior utilização, quer para a medição de rotações, quer em estruturas caracterizadas pela leveza e flexibilidade; como por exemplo, em satélites, como foi o caso apresentado por Zheng e Soucy em 1997 [21]. Também nas microtecnologias se tem observado a sua crescente utilização, nomeadamente na medição de vibrações em componentes electrónicos, tal como foi feito por Castelini, Marchetti e Tomasini [22] e por Lee e Polycarpou [23] em discos rígidos, por Schnitzer, Rümmler e Michel [24] em circuitos impressos, e por Lawrence, Speller e Yu [25] e por Rembe *et al* [26] em sistemas micro-electromecânicos (MEMS[3]) tais como interruptores ópticos usados na indústria das comunicações. Também na bioengenharia o LASER tem vindo a ter um papel de crescente divulgação, tendo sido utilizado por Decraemer, Khanna e Dirckx [27] na medição das vibrações no ouvido médio, por Castellini, Huebner e Pinotti [28] na medição do comportamento de uma válvula artificial de coração e por Revel, Scalise e Scalise [29] na análise das propriedades dinâmicas de tendões.

O segundo aspecto, solicitação com momentos puros e medição do seu valor, tem motivado muitos trabalhos de investigação; no entanto, não foi ainda possível encontrar uma solução que não apresentasse um conjunto demasiadamente vasto de limitações. A aplicação de um momento puro pontual, na prática, é muito difícil de se conseguir, aparecendo normalmente forças residuais. A alternativa é aplicar uma força conhecida que produza simultaneamente um momento, o que também tem trazido alguns problemas.

[3] O acrónimo inglês MEMS é utilizado para descrever *Micro Electro-Mechanical Systems*.

Em 1969, Smith [30], que se encontra entre os primeiros na tentativa de aplicação de momentos puros, partiu da definição de binário, utilizando dois vibradores numa configuração tal que fosse possível aplicar duas forças iguais com sentidos opostos na estrutura. Trinta anos depois, Ribeiro [11] tenta uma abordagem semelhante utilizando um bloco rígido em forma de T, embora não tenha obtido resultados satisfatórios. Como principais causas para o insucesso, aponta diferenças nas impedâncias entre os dois excitadores (tendo sido implementadas diversas soluções alternativas para a sua correcção) e a própria reacção da estrutura que não garante que as forças aplicadas por cada vibrador sejam, em cada instante, perfeitamente simétricas. Sanderson e Fredo [31] e Sanderson [32] utilizam dois blocos rígidos, um em forma de T e outro em forma de I, demonstrando que o erro se deve fundamentalmente a duas causas: à aplicação errónea do binário (como consequência de aparecerem excitações indesejadas) e a erros na medição do momento. É ainda afirmado que o maior obstáculo a ultrapassar é a massa do excitador de momentos. Num projecto já referenciado, o Brite Euram PR-CT97-0540 [19], é descrito um excitador de momentos puros electromagnético de baixo peso, em que o problema da massa do excitador é minimizado. Trethewey e Sommer [33] desenvolveram recentemente um dispositivo que afirmam permitir a aplicação de momentos puros através das forças centrífugas geradas por massas descentradas colocadas nas extremidades de um veio. O momento causado na direcção ortogonal foi cancelado utilizando um segundo veio, idêntico, engrenado sobre o primeiro, mas com sentido de rotação oposto. No entanto, este método também tem algumas restrições, nomeadamente o facto de a gama de frequências de aplicação estar limitada (depende da velocidade de rotação máxima do motor, que no caso estudado era de 3400rpm correspondendo a uma frequência de 56.7Hz), limitação a excitações harmónicas, problemas relacionados com a fixação do dispositivo à estrutura e efeitos causados pelo acoplamento de uma massa significativa para a maior parte das estruturas.

O método descrito por Ewins e Sainsbury [12], Ewins e Gleeson [6], Sainsbury [13], Silva [14] e Ewins e Silva [15] está entre as primeiras tentativas de medição de receptâncias rotacionais. Usando um bloco rígido em forma de T, mostraram que a matriz completa de receptâncias pode ser expressa em termos das receptâncias de translação, uma matriz de transformação de coordenadas e uma matriz de massa da ligação rígida. Com este método, cujos aspectos teóricos serão apresentados na secção 3.3.2.1, os resultados dos ensaios nem sempre têm a qualidade pretendida, principalmente se se pretender que seja usado em processos de acoplamento que tendem a propagar acentuadamente os erros [11]. Cheng e Qu [34] e Qu, Cheng e Rancourt [35] usaram uma técnica semelhante, mas baseada no uso de um bloco rígido em forma de L. Maia, Silva e Ribeiro [36][37] apresentam um método, baseado em técnicas de desacoplamento, em que se estimam FRF's rotacionais sem que estas tenham que ser medidas (ou pelo menos parte delas). É ainda demonstrado que não é necessário recorrer a um excitador de momentos, nem tampouco é necessário introduzir momentos por recurso a forças descentradas aplicadas em dispositivos específicos para o efeito, nomeadamente o bloco rígido em forma de T (embora este seja usado com dois fins distintos: permitir a medição do deslocamento angular e provocar alterações ao momento de inércia da estrutura). Este método será explorado no âmbito do presente trabalho, embora a abordagem seja diferente, no sentido em que nestes artigos as operações de desacoplamento são efectuadas em simultâneo enquanto que neste trabalho as operações de desacoplamento são feitas individualmente. A metodologia seguida neste trabalho é semelhante à que Maia, Silva e Ribeiro utilizaram para estimar a matriz de receptância completa de um sistema de N graus de liberdade de translação em [38] e [39] partindo de apenas uma coluna ou linha da matriz.

Finalmente, resta referir que, no mesmo mês em que esta dissertação foi concluída, Mottershead, Kyprianou e Ouyang [40] apresentaram um artigo na conferência internacional DAMAS 2003, em Southampton, em que utilizaram igualmente um bloco em forma de T para estimar termos rotacionais de FRF's. A principal inovação deste trabalho em relação a anteriores está na inclusão da rigidez do bloco em forma de T através de modelação por elementos finitos.

1.5. ESTRUTURAÇÃO

Este trabalho é composto por quatro capítulos. Neste primeiro, apresenta-se o tema, justificando-se ainda a importância do estudo em questão na engenharia e, em particular, na dinâmica de estruturas, sendo concluído por uma revisão do estado actual dos conhecimentos onde se citam alguns dos trabalhos mais relevantes na área.

No segundo capítulo, intitulado «Considerações experimentais e metrológicas», é elaborada uma análise do desempenho de um transdutor LASER utilizando como referência transdutores piezoeléctricos. Este capítulo aparece na perspectiva de identificar as vantagens e limitações associados à utilização de um transdutor LASER. Neste estudo são abordadas questões tais como análise do sinal no tempo e a influência do ruído, ganho, distância focal e ângulo de projecção no sinal, além de ser feita uma análise da fase. Para além disto, é também abordada a questão da calibração dos transdutores, utilizando-se um método bastante eficaz que consiste na calibração de cada par transdutor de resposta-transdutor de força, método este que tem a vantagem de permitir determinar a massa activa do transdutor de força iterativamente. No que diz respeito à forma como é aplicada a força, estuda-se a influência de três tirantes diferentes, um deles construído no decorrer da fase experimental deste trabalho.

O terceiro capítulo, que toma o mesmo título da dissertação, «Determinação de termos rotacionais da resposta dinâmica por técnicas de análise modal», é o cerne de todo este trabalho. Divide-se em cinco secções principais:

- Numa primeira secção, intitulada «Função de Resposta em Frequência - Generalidades», achou-se oportuno apresentar a definição de Função de Resposta em Frequência (FRF), abordando alguns aspectos relevantes, nomeadamente os mecanismos de formação de ressonâncias e anti-ressonâncias e o que se entende por residuais. São também apresentados os conceitos básicos de uma técnica conhecida de identificação modal que utiliza a chamada Função de Resposta Característica (FRC);

- Na segunda secção, intitulada «Acoplamento dinâmico de estruturas», expõem-se os fundamentos teóricos nos quais assenta o método desenvolvido neste trabalho. A técnica utilizada baseia-se no acoplamento de subestruturas, sendo normalmente designada de Acoplamento de Impedâncias. Esta secção é rematada por considerações teóricas no âmbito da modificação estrutural cujas observações nesta fase vão permitir compreender alguns dos problemas associados ao método desenvolvido posteriormente;

- Só na terceira secção, intitulada «Rotações e Momentos», é que se abraça o problema das rotações, sendo feitas por várias vezes referências a conceitos abordados na secção anterior. Inicialmente, apresenta-se um método, bastante referenciado na literatura, em que se utiliza um bloco em forma de T acoplado à estrutura num determinado ponto e em que se aplica uma força numa das suas extremidades por forma a provocar um momento no ponto de ligação. Este método vai servir apenas como termo de comparação com o método que se apresenta seguidamente, desenvolvido e estudado ao longo do resto do trabalho, que consiste igualmente na utilização do mesmo bloco em forma de T, mas cuja principal diferença reside em não ser necessária a aplicação de uma força descentrada (responsável pelo momento) na estimativa de termos rotacionais da resposta dinâmica. A discussão da metodologia aqui apresentada, é feita, numa primeira etapa, com base num modelo numérico de dois graus de liberdade especialmente concebido, em que há um modo de rotação e outro de translação. Introduzida a metodologia e identificadas algumas das suas particularidades, é então apresentada uma aplicação experimental em que se utiliza uma viga de secção rectangular como estrutura de teste. O motivo pelo qual se optou por utilizar este tipo de estrutura, tem a ver com a facilidade com que se podem validar os resultados obtidos. Neste caso, utilizou-se a teoria de Timoshenko para sistemas contínuos (para sistemas mais complexos, poderia ser necessário recorrer a uma modelação numérica do sistema, v.g., pelo Método dos Elementos Finitos – MEF). Os resultados são ainda objecto de um processo de identificação modal, o que vai permitir distinguir a origem dos erros em duas classes fundamentais: ruído e instabilidade numérica. Finalmente, comparam-se ambos os métodos cujos modelos matemáticos haviam sido introduzidos inicialmente. A discussão dos resultados é feita ao longo do capítulo sempre que se considera pertinente, por se ter considerado que assim se poderia apresentar o método com maior clareza, pelo que não foi aberta nenhuma secção específica nesse sentido.

No quarto e último capítulo, intitulado «Conclusões», resumem-se as principais conclusões tiradas ao longo do texto propondo-se algumas sugestões para trabalho futuro.

2. CONSIDERAÇÕES EXPERIMENTAIS E METROLÓGICAS

«LASER é a solução em busca do problema.»

Theodore H. Maissan, 1960

2.1. INTRODUÇÃO À CARACTERIZAÇÃO DINÂMICA DE ESTRUTURAS

O estudo das vibrações concentra-se na caracterização dinâmica de estruturas. Em [4] demonstra-se que as propriedades dinâmicas de um sistema com *N* graus de liberdade pode ser descrito por três tipos de modelos: modelo Espacial; modelo Modal e modelo de Resposta.

No primeiro caso, as características dinâmicas estão contidas numa distribuição espacial das propriedades de massa, rigidez e amortecimento, descritas por matrizes de massa [*M*], rigidez [*K*] e amortecimento [*C*] (no caso de amortecimento viscoso) ou [*D*] (no caso de amortecimento histerético). Considerando que o movimento de cada grau de liberdade do sistema pode ser descrito por uma coordenada $x_i(t)$ e que associado ao movimento de cada grau de liberdade está uma excitação $f_i(t)$, em que i = 1, 2, ..., *N* graus de liberdade, então este modelo pode ser escrito como:

$$[M]\{\ddot{x}\}+[C]\{\dot{x}\}+[K]\{x\}=\{f\} \tag{2.1}$$

para o caso de amortecimento viscoso, e como:

$$[M]\{\ddot{x}\}+(i[D]+[K])\{x\}=\{f\} \tag{2.2}$$

para o caso de amortecimento histerético.

O modelo espacial descrito por estas matrizes constitui um problema de valores e vectores próprios que uma vez resolvido resulta no modelo modal contido em matrizes $\left[{}^{\backslash}\lambda_{r\backslash}^{2}\right]$ e $[\Phi]$. Na primeira matriz cada elemento da diagonal tem informação acerca das frequências naturais do modo de vibração r correspondente podendo, no caso do amortecimento histerético, ser escrito na forma:

$$\lambda_r^2 = \omega_r^2 \cdot (1 + i\eta_r) \tag{2.3}$$

em que ω_r^2 e η_r são o quadrado da frequência natural e o coeficiente de amortecimento histerético, respectivamente, para o modo *r*. A matriz $[\Phi]$ contém os vectores modais (vectores próprios obtidos por resolução do modelo espacial) normalizados à massa, sendo definidas as propriedades de ortogonalidade do modelo modal como:

$$[\Phi]^T [M][\Phi] = [I] \tag{2.4}$$

$$[\Phi]^T [[K] + i[D]][\Phi] = [\backslash \lambda_{r\backslash}^2] \tag{2.5}$$

em que $[I]$ é a matriz identidade. Os vectores modais, devido às propriedades de ortogonalidade, são linearmente independentes, donde $[\Phi]$ é uma matriz não-singular e invertível. Deste modo, é evidente que as relações (2.4) e (2.5) permitem passar do conhecimento do modelo modal para o modelo espacial e *vice-versa*.

No entanto, quando se está na presença de sistemas muito complexos, e que portanto não possam ser modelados analiticamente, tem que se recorrer à experimentação que conduz à obtenção de um modelo de resposta $[H(\omega)]$. Quando em estado estacionário, a vibração de uma estrutura ou sistema mecânico pode ser caracterizada pela razão entre a resposta e a solicitação. Considerando uma vibração harmónica, esta relação pode exprimir-se como uma função da frequência por:

$$H(\omega) = \frac{X}{F} \tag{2.6}$$

em que X e F são, respectivamente, as amplitudes da resposta e da solicitação. A função $H(\omega)$ é denominada Função de Resposta em Frequência (FRF).

Como o deslocamento, velocidade e aceleração são quantidades matematicamente relacionadas por simples operações de diferenciação e integração, o conhecimento de uma FRF em termos de um dos parâmetros do movimento permite o conhecimento imediato das outras formas da FRF.

É possível relacionar o modelo modal com o modelo de resposta obtido experimentalmente, tal como se demonstra em [4], através de (para o caso da receptância[4]):

$$[\alpha(\omega)] = [\Phi]\left[\diagdown\, \omega_r^2(1+\eta_r)-\omega^2 \,\diagdown\right]^{-1}[\Phi]^T \tag{2.7}$$

A matriz de receptância $[\alpha(\omega)]$ é obtida experimentalmente através do uso de equipamento específico, em que a aquisição do sinal tem de ser feita através da utilização de pelo menos um transdutor de força (para medir F em (2.6)) e um transdutor de resposta (para medir X em (2.6)).

Como se verá adiante, são conhecidas algumas técnicas que permitem a derivação do modelo modal de um sistema através do conhecimento do modelo de resposta experimental. Este procedimento é conhecido como Identificação Modal.

Na Fig. 2.1 está esquematizada toda discussão acima elaborada e ilustradas as relações existentes entre os modelos espacial, modal e de resposta.

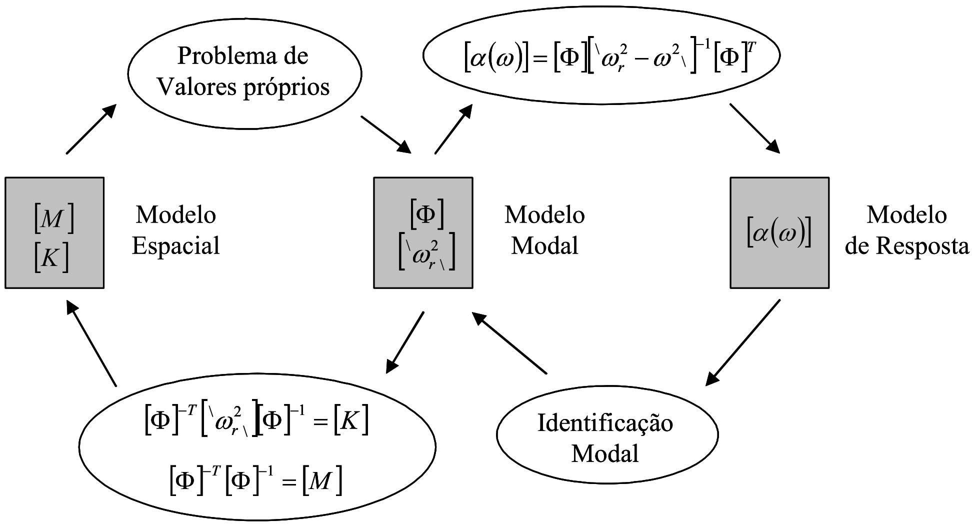


Fig. 2.1 Relações entre os modelos espacial, modal e de resposta (caso não amortecido)

---

4 A receptância *α(ω)* utiliza-se para descrever a relação entre uma resposta do tipo deslocamento e uma solicitação, sendo correspondente a um caso particular da forma generalizada de representação de FRF's *H(ω)*. Outras formas particulares de representação de FRF's *H(ω)* são a mobilidade *Y(ω)* (que relaciona a velocidade com a solicitação) e a acelerância *A(ω)* (que relaciona a aceleração com a solicitação). No decorrer deste texto, por uma questão de generalização, será utilizado o termo *H(ω)* sempre que possível, recorrendo-se no entanto às formas particulares quando tal não for conveniente.

2.2. TRANSDUTORES

2.2.1. INTRODUÇÃO

Os transdutores são, de todos os componentes envolvidos num sistema de aquisição de dados, os principais actores, já que são estes instrumentos que procedem à recolha da informação que descreve o comportamento dinâmico de uma determinada estrutura em análise. Todos os outros equipamentos envolvidos não passam de unidades de processamento de dados, cálculo e interface entre componentes e experimentalista.

O critério de escolha de um transdutor está relacionado com um conjunto vasto de factores dos quais se destacam a massa, dimensão, sensibilidade e aplicação. O acoplamento de um transdutor a uma estrutura implica inevitavelmente alterações nas propriedades físicas desta e, consequentemente, alterações nas suas propriedades dinâmicas, nomeadamente na rigidez local da estrutura onde o transdutor se encontra colocado e na massa do sistema. Em particular, verifica-se experimentalmente que as frequências modais sofrem desvios; por outras palavras, a análise que se está a fazer é ao conjunto formado pela estrutura e transdutores e não à estrutura isolada. Acresce o facto de se querer efectuar medições pontuais e não em áreas, o que implica que o transdutor deverá ser tão pequeno quanto possível.

O capítulo 2 surge na perspectiva de testar o desempenho e identificar as limitações de um transdutor de resposta LASER de dois canais utilizando como referência acelerómetros piezoeléctricos. Por esta razão, introduziu-se a presente secção que descreve os princípios básicos de funcionamento dos dois tipos de transdutores citados. No seguimento deste ponto, considerou-se oportuno fazer algumas considerações relativamente a transdutores de força.

2.2.2. TRANSDUTORES DE RESPOSTA

A tecnologia utilizada na instrumentação foi desenvolvida no sentido de permitir a medição directa de três grandezas físicas que caracterizam o movimento: deslocamento, velocidade e aceleração. Assim, para a medição de deslocamentos os instrumentos mais utilizados são o potenciómetro (de concepção mais simples), o LVDT[5] (para medição de translações), RVDT[6] (para medição de rotações) e o LASER (utilizando o princípio da triangulação). Para medir velocidades, o LASER (utilizando o efeito de Doppler), é provavelmente a opção mais popular. No que diz respeito às acelerações, utilizam-se transdutores, habitualmente designados de acelerómetros, que podem ser piezoeléctricos, piezoresistivos, capacitivos, ou de equilíbrio de forças.

Embora tenham ocorrido avanços recentes na tecnologia de transdutores LASER, que têm como vantagem principal não entrarem em contacto com a estrutura, os acelerómetros piezoeléctricos ainda são os instrumentos de medição da resposta dinâmica de um sistema de utilização mais generalizada, uma vez que, em geral, são transdutores de resposta pequenos e leves apresentando uma gama de frequências de funcionamento mais vasta que os restantes tipos de transdutores. Pode dizer-se que quanto menores forem as dimensões do transdutor, maior será a gama de frequências em que poderá ser utilizado, embora a sua sensibilidade diminua [41]. Por outro lado, as propriedades dinâmicas da estrutura são tanto menos afectadas quanto menores e mais leves forem os transdutores.

2.2.2.1. PRINCÍPO DE FUNCIONAMENTO DE UM ACELERÓMETRO PIEZOELÉCTRICO

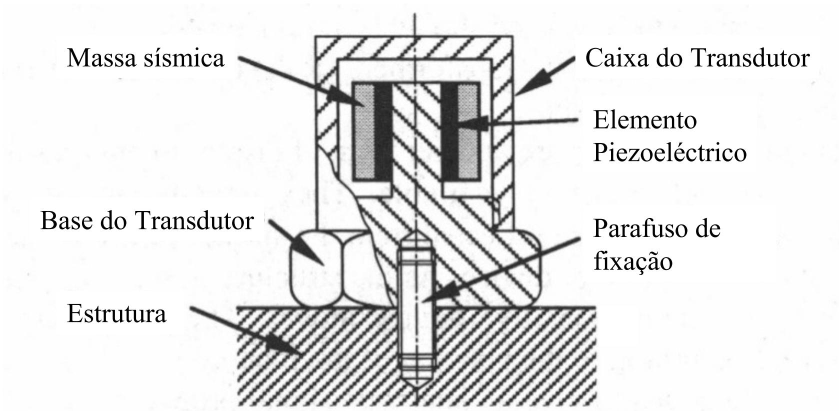


Fig. 2.2 Secção transversal de um acelerómetro piezoeléctrico convencional [4].

5 O acrónimo inglês LVDT é utilizado para descrever *Linear Variable Differential Transformer*.

6 O acrónimo inglês RVDT é utilizado para descrever *Rotary Variable Differential Transformer*.

Na Fig. 2.2 apresenta-se um corte parcial esquemático de um acelerómetro piezoeléctrico convencional. Existem quatro componentes principais: a caixa, o pilar central, o elemento piezoeléctrico[7] e a massa sísmica. O cristal piezoeléctrico e a massa sísmica estão dispostos concentricamente em torno do pilar central. A base do acelerómetro move-se solidária com a estrutura à qual está ligada, donde a inércia da massa sísmica provoca no cristal uma força proporcional ao produto da mesma massa sísmica pela respectiva aceleração. Esta força, transmitida através do cristal piezoeléctrico que se deforma ligeiramente como consequência do esforço, produz uma carga eléctrica no cristal piezoeléctrico proporcional à deformação e, portanto, proporcional à aceleração da massa sísmica e da estrutura.

Estes mecanismos operam bem dentro de uma determinada gama de frequências, mas não são em geral adequados para aplicações a baixas frequências [4].

2.2.2.2. PRINCÍPIO DE FUNCIONAMENTO DE UM TRANSDUTOR LASER

LASER é o acrónimo inglês utilizado para descrever Amplificação de Luz por efeito da Emissão Estimulada de Radiação (*Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation*). O seu funcionamento baseia-se na emissão estimulada de fotões, pelo que os fotões emitidos produzem luz coerente. Um feixe de luz diz-se coerente quando as ondas que o constituem têm o mesmo comprimento de onda, estão em fase e se propagam em direcções paralelas[8]. As ondas emitidas pelo LASER, por serem coerentes, reforçam-se mutuamente, podendo um feixe manter-se estreito por longas distâncias com pouca dispersão de energia radiante.

Um LASER consiste numa cavidade óptica que contém um meio *lasing* com um espelho colocado em cada extremidade (Fig. 2.3).

---

[7] Um material piezoeléctrico é, por definição [41], um material que produz uma descarga eléctrica quando sujeito a uma força. Têm-se como exemplos típicos de materiais piezoeléctricos, o quartzo, o sal Rochelle e cerâmicos ferroeléctricos artificialmente polarizados.

[8] Note-se que, para ser coerente, uma luz tem que ser monocromática, mas nem toda a luz monocromática é necessariamente coerente.

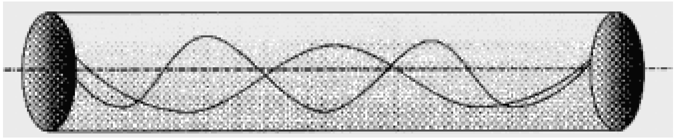


Fig. 2.3 Cavidade óptica de geração do LASER.

A luz, propagada por uma onda estacionária dentro da cavidade óptica, é repetidamente reflectida entre os dois espelhos e amplificada. Como um dos espelhos só reflecte parcialmente, é emitido um feixe de LASER da cavidade. Para manter o processo em curso, é fornecida energia ao sistema de modo a excitar os átomos do meio *lasing*.

Os velocímetros LASER de Hélio-Neon (He-Ne), produzem uma luz visível de cor encarnada com um comprimento de onda λ=632.8nm. O seu funcionamento baseia-se no facto de que, quando um feixe LASER é dividido e subsequentemente recombinado, existe uma relação de fase bem definida no feixe resultante, mesmo que as componentes dos feixes tenham percorrido uma distância diferente [11].

Por outras palavras, a luz reflectida contém informação acerca da velocidade e posição do alvo em movimento. Pode dizer-se que este movimento modula a fase da onda de luz enquanto a velocidade altera a frequência óptica. Como a luz do LASER He-Ne tem uma frequência de cerca de 4.74×10^{14} Hz [42], não é prático ou até mesmo possível desmodular o sinal directamente, pelo que se tem de recorrer a técnicas de interferometria [43]. Num interferómetro a onda de luz reflectida é combinada com o feixe de referência de modo a que os dois sinais se heterodinem[9] na superfície de um fotodíodo. Apresenta-se na Fig. 2.4 um diagrama simplificado de um interferómetro modificado de Mach-Zehnder, usado na maior parte dos transdutores LASER por efeito Doppler.

Dentro do interferómetro, a luz coerente emitida pelo LASER de He-Ne é separada pelo divisor de feixe polarizador DFP1 em feixe de referência e feixe de medição. Enquanto que o feixe de referência é transmitido ao fotodíodo FD passando por um espelho M, célula de Bragg CB e DF2, o feixe de medição é direccionado para o alvo em vibração através de DFP3 e sistema de lentes L e P. A luz reflectida vem polarizada e é captada pela lente L,

9 Heterodinar: produzir uma frequência pela combinação de dois ou mais sinais num dispositivo não-linear (v.g., num tubo de vácuo, num transístor ou num díodo) [44].

só então sendo enviada para o fotodíodo FD passando por DFP3 e DF2. A célula de Bragg é um dispositivo que altera a frequência óptica do feixe de referência através de um sinal de controlo eléctrico emitido a uma frequência f_0 designada por frequência de transporte.

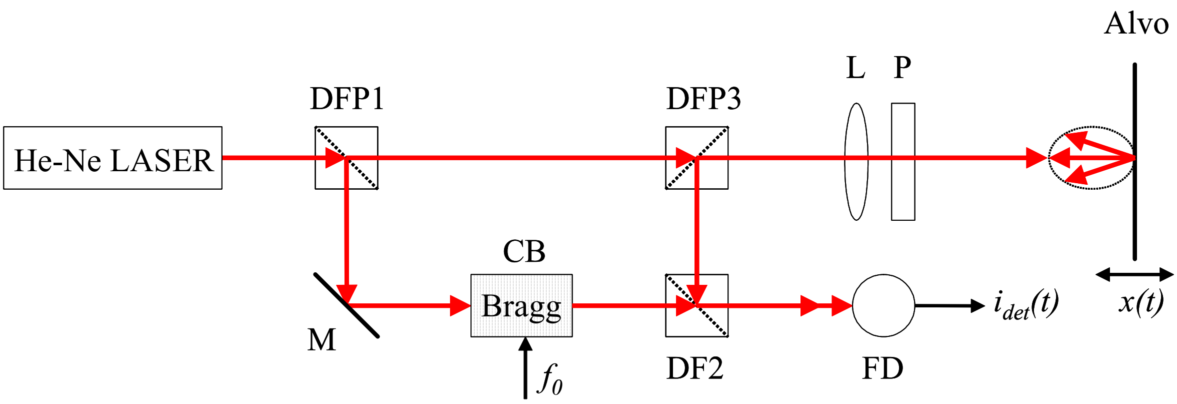


Fig. 2.4 Esquema de um interferómetro modificado de Mach-Zehnder [43].

A intensidade resultante $i_{det}(t)$ é determinada pela relação entre fases e frequências dos feixes de luz heterodinados no fotodíodo FD [43]. Como é evidente, a diferença de fases entre os feixes de referência e de medição depende do comprimento percorrido por ambos os feixes, que se altera, no caso do feixe de medição, com a posição do alvo $x(t)$. No caso do alvo estar em repouso, a corrente de saída do fotodíodo $i_{det}(t)$ é dada por:

$$i_{det}(t) = I_{DC} + \hat{i}\,cos(2\pi f_0 + \varphi_0) \tag{2.8}$$

em que I_{DC} é a componente DC, $\hat{i}$ é a amplitude AC e φ_0 é ângulo de fase inicial (definido pela posição inicial do objecto). O segundo termo nesta equação representa um sinal harmónico de alta frequência (f_0) característico dos interferómetros de heterodinização.

Este sinal transporta informação relativa à modulação tanto em frequência como em fase, sendo sensível à direcção da vibração. No caso de um alvo em movimento, a posição $x(t)$ resulta numa modulação de fase, i.e., φ_0 passa a ser acrescida de uma componente variável no tempo:

$$\varphi_m(t) = \frac{4\pi x(t)}{\lambda} \tag{2.9}$$

A modulação da fase pode também ser expressa em modulação da frequência. Substituindo em (2.9) as relações básicas $d\varphi/dt = 2\pi f$ e $dx/dt = \dot{x}$, a velocidade do objecto resulta num desvio da frequência $\Delta f(t)$ relativamente à frequência de transporte f_0, sendo habitualmente designado por desvio de Doppler da frequência:

$$\Delta f(t) = \frac{2\dot{x}(t)}{\lambda} \tag{2.10}$$

Desde que, na presença de velocidades negativas, o valor absoluto de Δf não exceda o da frequência de transporte f_0, i.e., que $f_0 > |\Delta f|$, o sinal emitido pelo fotodíodo $i_{det}(t)$ preserva o sinal do vector velocidade. No caso de uma vibração harmónica a uma frequência f_{vib}, a largura de banda do sinal heterodinado modulado é teoricamente infinita, sendo estimada na prática por:

$$LB_{het} = 2(\Delta f + f_{vib}) \tag{2.11}$$

Consequentemente, f_0 tem que ser, pelo menos, $\Delta f_{max} + f_{vib}$. Normalmente utiliza-se quartzo para gerar f_0 a 40MHz [45], conseguindo-se, nessas condições, ter uma velocidade máxima de 10m/s e uma frequência máxima de vibração a 2MHz [43].

2.2.3. TRANSDUTORES DE FORÇA

Os transdutores de força mais vulgarmente utilizados em análise dinâmica funcionam de acordo com o princípio de que a deformação de um cristal piezoeléctrico produz uma carga eléctrica proporcional à força que actua no cristal (princípio de funcionamento semelhante ao de acelerómetros piezoeléctricos). Na Fig. 2.5 apresenta-se esquematicamente a secção transversal de um transdutor de força típico, em que se podem identificar duas massas constituintes, uma, abaixo do elemento piezoeléctrico, com 3g, e outra, acima do elemento piezoeléctrico, com 18g [4]. A massa que está do lado da estrutura é normalmente designada por *massa activa*. A massa activa é a massa "vista" pela estrutura na direcção da solicitação. Nas secções que se seguem discute-se a importância e influência da massa activa e massa total dos transdutores de força nos ensaios experimentais.

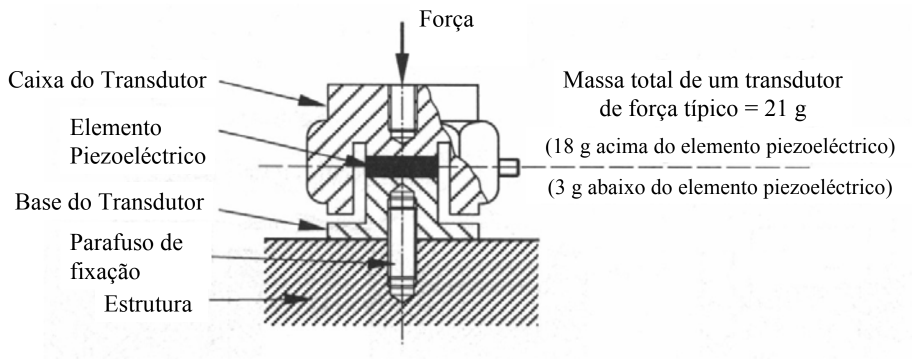


Fig. 2.5 Secção transversal de um transdutor de força piezoeléctrico convencional [4].

2.2.3.1. TRANSMISSÃO DA SOLICITAÇÃO (FORÇA) AO SISTEMA

Um vibrador, utilizado para solicitar dinamicamente a estrutura, é acoplado no topo do transdutor de força actuando sobre o cristal piezoeléctrico. O outro lado do cristal está junto à base do transdutor que por sua vez é fixa à estrutura. Na direcção axial, a força aplicada à estrutura é a resultante da diferença entre a força transmitida pelo elemento piezoeléctrico e a força necessária para acelerar a base do transdutor. Uma ligação rígida entre o transdutor de força e o vibrador vai introduzir constrangimentos ao movimento da estrutura e, como é óbvio, para além de alterar o seu comportamento dinâmico, afecta o sinal do transdutor. De facto, e com excepção de alguns casos particulares de simetria, à aplicação da perturbação, o sistema vai responder com translações e rotações e, portanto, o vibrador (ou transdutor de força) vai ser afectado por reacções (forças e momentos) que vão distorcer o sinal e introduzir erros nas medições. Para evitar isto, a excitação deve ser aplicada através de um tirante que seja relativamente flexível quando sujeito a esforços de flexão e de torção, mas muito rígido na direcção axial.

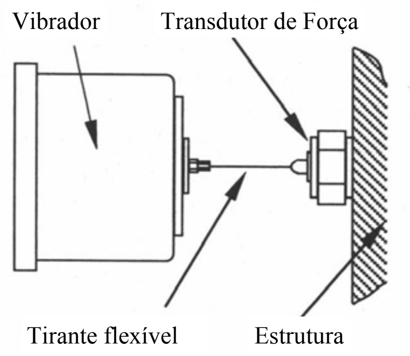


Fig. 2.6 Utilização de um tirante entre o vibrador e o transdutor de força [4].

2.2.3.2. EFEITOS DA LIGAÇÃO DO TRANSDUTOR DE FORÇA

Os transdutores de força são construídos para terem uma massa tão baixa quanto possível no lado da base. Esta opção tem que ver com a forma muito particular como o transdutor de força altera as propriedades de massa da estrutura.

Na Fig. 2.7a) é ilustrada uma montagem convencional em que a base está do lado da estrutura e o topo está acoplado a um tirante. A massa activa do transdutor de força é pequena com o objectivo de minimizar a modificação estrutural. Contudo, o que é minimizado é a modificação estrutural na direcção da solicitação. A massa total do transdutor de força modifica o movimento da estrutura em direcções perpendiculares à da perturbação assim como a sua inércia de rotação afecta a rotação da estrutura no ponto de ligação.

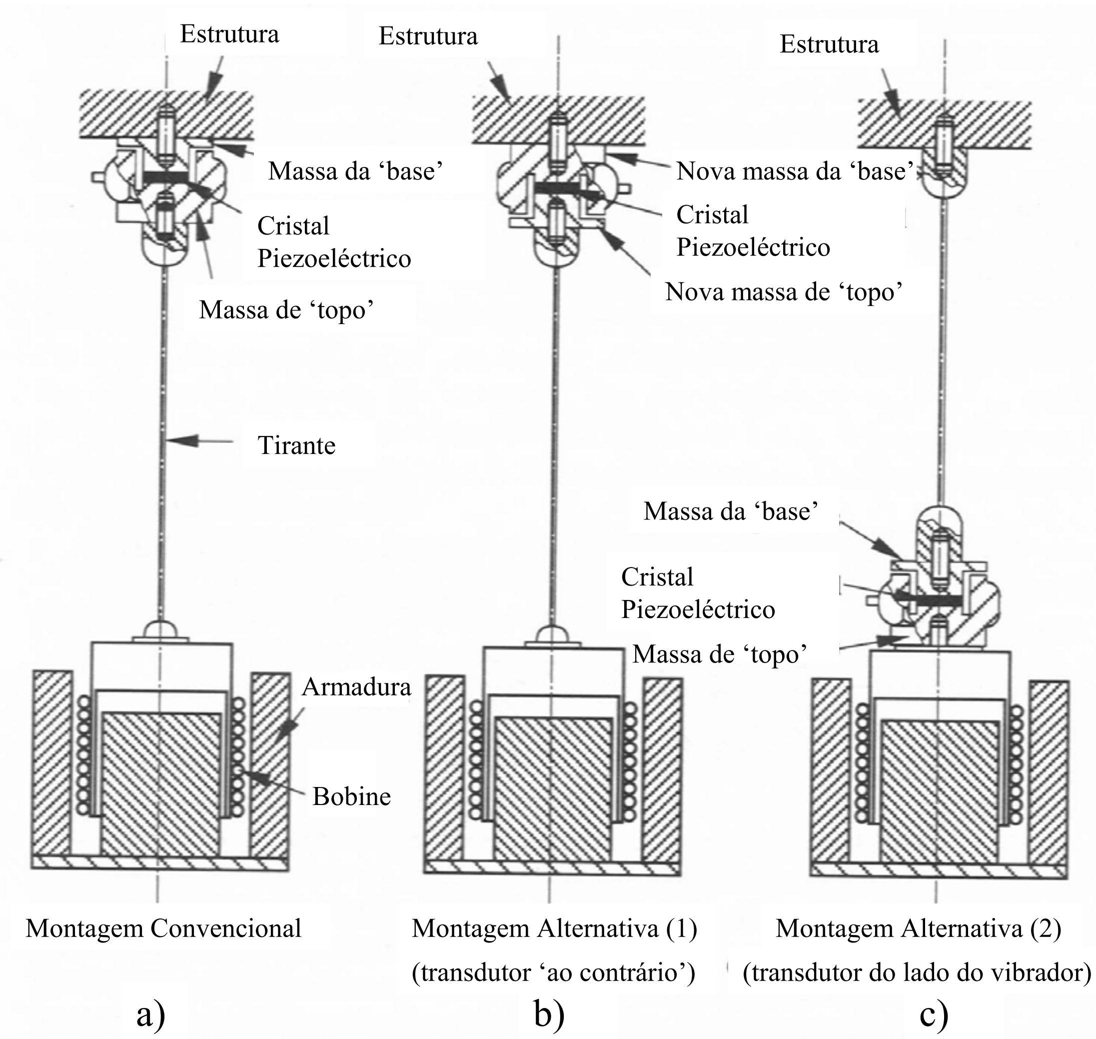


Fig. 2.7 Formas alternativas de montar um transdutor de força num ensaio [4].

Para um transdutor típico tal como o representado na Fig. 2.5, a massa da base, de apenas 3g, é a que é “vista” pela estrutura na direcção da solicitação. No entanto, em direcções perpendiculares a estrutura “vê” a sua massa total, i.e., os 21g. Isto significa que há uma grande discrepância entre a massa aparente de um transdutor de força quando “observada” pela estrutura na direcção da solicitação e quando “observada” pela estrutura em direcções perpendiculares.

Se o transdutor de força for montado ao contrário (Fig. 2.7b)), haverá uma diferença menor entre as cargas aparentes vistas pela estrutura na direcção da perturbação e em direcções perpendiculares. Neste caso, a massa activa passa a ter um valor de 18g, mantendo-se a massa total de 21g em direcções perpendiculares.

Uma forma alternativa para a redução desta discrepância entre massa adicionada na direcção do carregamento e massa adicionada em direcções perpendiculares, consiste em montar o transdutor de força directamente no vibrador electromagnético de forma a que a parte com menos massa esteja do lado da estrutura (Fig. 2.7c)). Assim, só a pequena massa activa em conjunto com o tirante é que altera a estrutura no sentido da solicitação, e em direcções perpendiculares esta só é alterada por parte do tirante. Normalmente, a massa do tirante é inferior à massa total do transdutor de força, pelo que a modificação global será inferior que para o método convencional. Além disso, haverá uma discrepância menor entre o que a estrutura “vê” nas direcções da solicitação e perpendicular. Uma vantagem suplementar deste método reside no facto do cabo que liga o transdutor ao equipamento de medida, por ter massa e rigidez consideráveis, ter menos influência nas características medidas especialmente no caso de estruturas leves.

No presente trabalho optou-se por utilizar a montagem b). Esta escolha teve como fundamento as características muito específicas dos elementos intermédios na cadeia da montagem experimental (nomeadamente, tipo de roscas disponíveis e pormenores construtivos dos elementos ligantes). Pelos motivos acima referidos, o cancelamento de massa apresenta-se como sendo uma técnica que interessa aplicar para que se consiga caracterizar com precisão as propriedades dinâmicas do sistema em estudo.

2.3. ENSAIOS

Os ensaios realizados nesta secção têm como objectivo avaliar os resultados obtidos através do LASER da Polytec - controlador OFV-2802i e interferómetro OFV-508, utilizando como referência os valores recolhidos através de um acelerómetro piezoeléctrico uniaxial da Brüel & Kjær (Deltatron 4507).

O LASER tem dois feixes montados num suporte acrílico que se encontra sobre a cabeça de um tripé de fotografia. Os dois feixes têm os objectivos de medir translações bem como rotações, de acordo com as metodologias abordadas no capítulo 3 (Fig. 2.8).

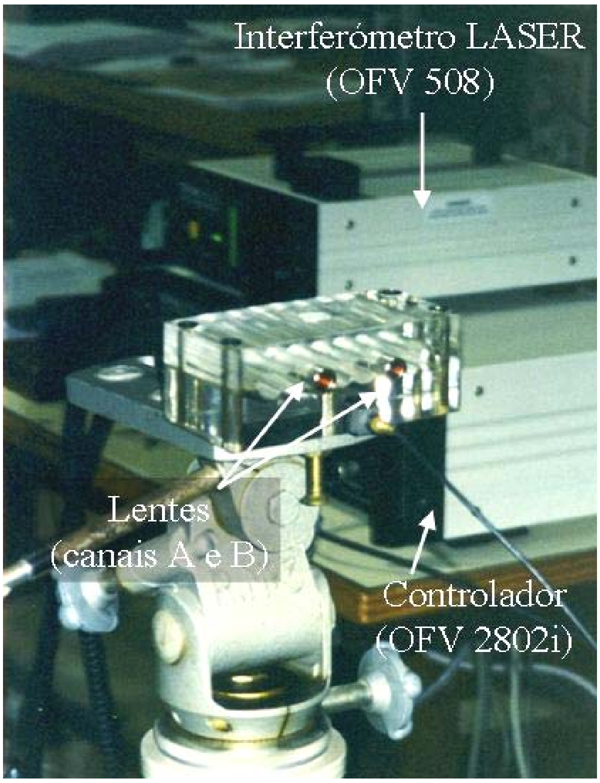


Fig. 2.8 Equipamento LASER da Polytec.

O equipamento utilizado experimentalmente pode ser consultado no ANEXO A - Equipamento experimental.

Apresentam-se na Fig. 2.9 fotografias em que constam uma montagem experimental e a mesa de trabalho onde se encontra instalado o equipamento de controlo, aquisição e processamento de sinal.

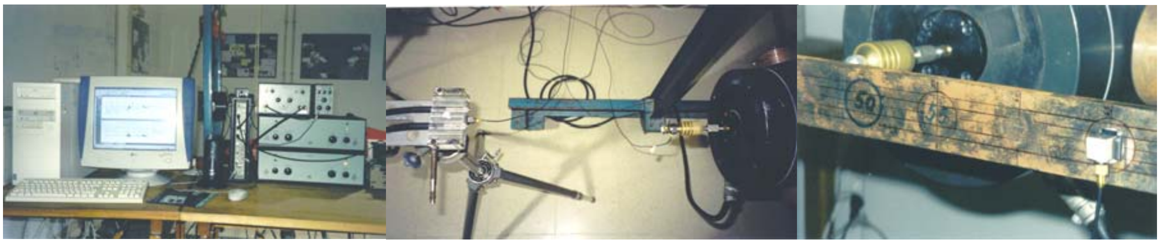


Fig. 2.9 Exemplo de uma montagem experimental e mesa de trabalho com equipamento de análise.

2.3.1. ENSAIOS NO TEMPO

2.3.1.1. ABORDAGEM

Assim como se realizaram ensaios em frequência (abordados adiante na secção 2.3.3), também os ensaios temporais poderão dar informações importantes acerca da resposta dos transdutores à solicitação dinâmica. Esta secção constitui o ponto de partida para os ensaios das técnicas de medição de termos rotacionais que se pretendem utilizar no decurso deste trabalho.

2.3.1.2. MONTAGEM EXPERIMENTAL E CONDUÇÃO DO ENSAIO

A montagem experimental consistiu em ligar e configurar os vários equipamentos, sem que se tenha utilizado sequer uma estrutura de teste (os transdutores já constituem só por si a estrutura). Na Fig. 2.10 pode observar-se um pormenor da ligação entre o excitador electromagnético, transdutor de força e acelerómetro piezoeléctrico B&K 4507, sendo também possível ver-se a fita reflectora e o feixe de LASER incidente.

Fig. 2.10 Pormenor da ligação entre o excitador electromagnético, transdutor de força e acelerómetro piezoeléctrico.

O ensaio consiste em solicitar os transdutores de resposta com um sinal harmónico a uma frequência conhecida e medir as respostas no tempo. Foram feitas medições a 25Hz, 50Hz, 100Hz, 500Hz, 1000Hz e 2000Hz. O critério de escolha destas frequências baseou-se em construir uma amostra suficientemente representativa da resposta dos transdutores dentro de uma gama de frequências nas quais se espera tenham um bom comportamento[10].

Dado que o transdutor LASER mede velocidades e que o acelerómetro mede acelerações, é necessário proceder a uma operação matemática de diferenciação/integração num dos sinais para que se possa estabelecer uma comparação consistente. Embora possa parecer que é redundante, optou-se por fazer ambas as representações (em termos de velocidade e aceleração) para que se pudesse inferir acerca da influência destas operações matemáticas no sinal.

2.3.1.3. RESULTADOS

Os sinais obtidos pelos transdutores LASER e piezoeléctrico, quando representados em termos de velocidade, não apresentaram diferenças muito acentuadas entre si até aos 500Hz, começando estas a tornar-se cada vez mais evidentes à medida que se fez aumentar a frequência a partir deste valor. Apresentam-se nas Fig. 2.11 e Fig. 2.12, respectivamente, dois sinais representativos para as frequências de 100Hz e de 2000Hz.

Em primeiro lugar, observa-se que os sinais parecem estar em fase aos 100Hz, embora aos 2000Hz seja nítido que apresentam um desfasamento (que também existe a frequências inferiores embora de forma menos pronunciada). Este fenómeno deve-se a um atraso do sinal no circuito (por questões relacionadas com o princípio de funcionamento do interferómetro), proporcional à frequência, que pode ser minimizado utilizando electrónica específica para processamento do sinal, por exemplo, um amplificador operacional de alta

[10] No que diz respeito ao acelerómetro piezoeléctrico utilizado, é aconselhado nas suas especificações que a gama de frequências não ultrapasse os 1500Hz quando não se utiliza cera no seu suporte (que foi o caso), podendo ir até aos 3000Hz quando se utiliza a referida cera. É no entanto de salientar que se optou por “violar” esta condição tendo em consideração que não pareceu que, ao analisar a evolução do comportamento do acelerómetro piezoeléctrico ao longo da amostra escolhida, houvesse degradação na sua resposta.

velocidade [46]. Na secção 2.3.8. sugere-se um método simples e expedito para corrigir este atraso em FRF's.

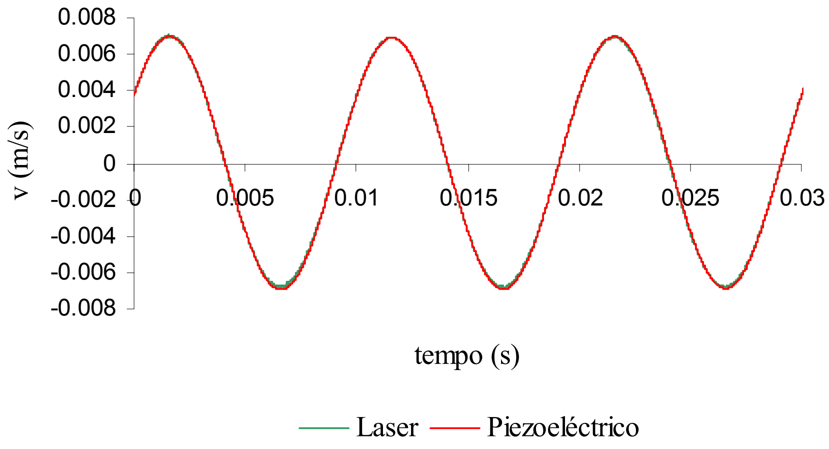


Fig. 2.11 Resposta (velocidade) ao sinal harmónico de 100 Hz adquirida pelos acelerómetro piezoeléctrico e transdutor LASER.

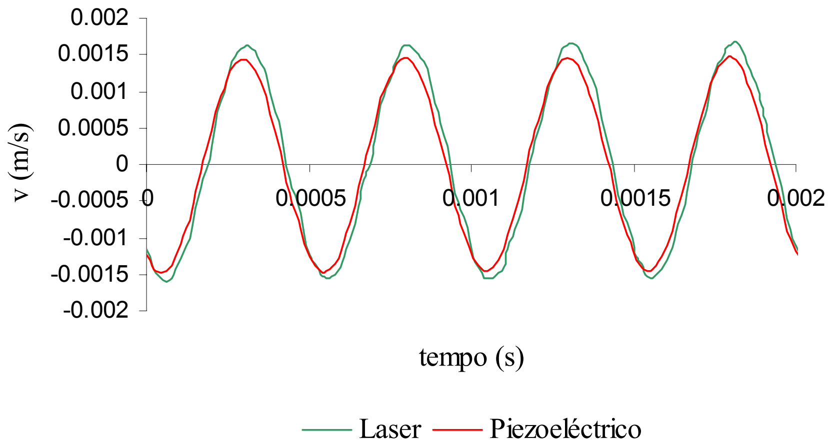


Fig. 2.12 Resposta (velocidade) ao sinal harmónico de 2000 Hz adquirida pelos acelerómetro piezoeléctrico e transdutor LASER.

No que diz respeito à amplitude, nota-se que os dois sinais têm amplitudes diferentes. Uma justificação que parece ser razoável apontar é a possibilidade de os factores de calibração utilizados poderem não ser os exactos, por razões de ordem diversa. Contudo, a amplitude do sinal recolhido pelo transdutor LASER parece ser inferior à do transdutor piezoeléctrico aos 100 Hz, sendo, pelo contrário, de amplitude mais elevada aos 2000 Hz (aos 1000Hz, esta diferença, embora não se apresentem aqui as curvas, também foi bem evidente). A amplitude dos sinais pode vir distorcida por causa de inúmeras razões, entre as quais por poder haver um deslocamento do referencial de inércia do acelerómetro em relação ao LASER [47]. Uma outra explicação que parece ser razoável apontar, tem que ver com a resposta em frequência do acelerómetro piezoeléctrico não ser efectivamente constante na gama de frequências em que este se comporta como uma massa rígida. Apresenta-se na Fig. 2.13 a curva típica de resposta em frequência do acelerómetro B&K 4507.

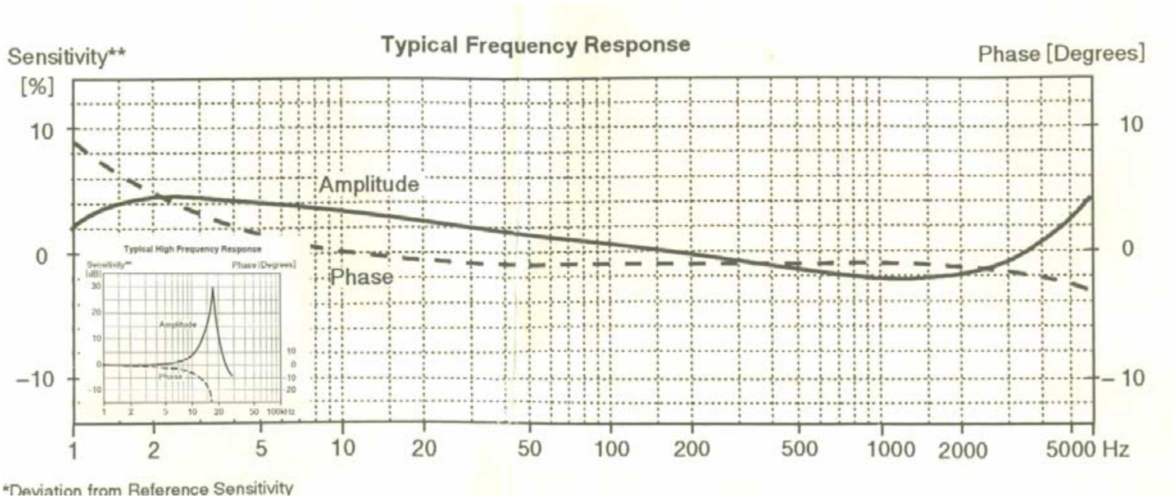


Fig. 2.13 Resposta em frequência típica para um acelerómetro piezoeléctrico B&K 4507.

É possível verificar que aos 100Hz a sensibilidade tem um desvio de cerca de +1% em relação à sensibilidade de referência (também designada por factor de calibração), enquanto que aos 2000Hz há um desvio de cerca de -2%, o que parece contribuir para justificar as observações anteriores.

De qualquer forma, não é possível, com os dados disponíveis, identificar qual o transdutor que melhor traduz o sinal harmónico emitido pelo excitador electromagnético.

A razão entre os sinais obtidos por cada um dos transdutores poderá ser um bom indicador da qualidade das respostas escritas em termos de velocidades: o seu valor deverá ser unitário. Esta representação, para o sinal harmónico de 100Hz, é feita na Fig. 2.14.

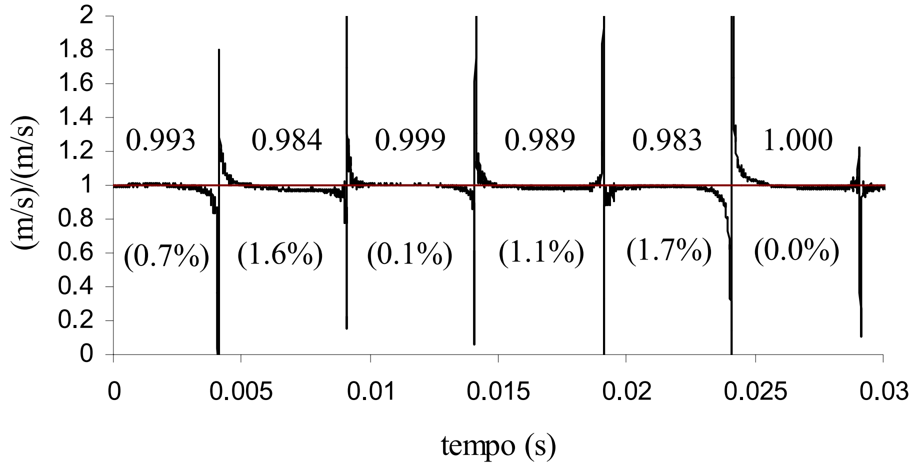


Fig. 2.14 Razão entre as respostas (velocidades) do transdutor LASER e do acelerómetro piezoeléctrico para uma solicitação harmónica a 100 Hz. Acima da recta constante unitária mostram-se os valores médios, por intervalo, do quociente definido (em que se exclui a vizinhança dos picos a $\pm 3.0\times 10^{-4}$ s) e abaixo da recta mostram-se as discrepâncias correspondentes em %.

Os picos que se evidenciam periodicamente são um resultado do desfasamento entre os sinais e dos erros existentes nas medições dos mesmos em zonas em que estes tomam valores muito pequenos. Em circunstâncias ideais, estes picos não deveriam aparecer.

As regiões que permitem tirar conclusões relevantes são as que estão compreendidas entre os picos, nas quais se calculou a média aritmética da função no intervalo correspondente (no calculo do valor médio não se entrou em linha de conta com a vizinhança dos picos a $\pm 3.0\times 10^{-4}$ s do seu valor máximo; este valor foi escolhido por forma a melhorar a estabilidade da função). Note-se que, considerando o acelerómetro piezoeléctrico como referência, a discrepância máxima que se verifica é de 1.7% na 5ª região da Fig. 2.14, havendo 3 regiões em que a discrepância é inferior a 1.0%. A discrepância média registada foi de 0.87%.

Por outro lado, já é possível detectar diferenças muito significativas entre os sinais representados em termos de acelerações (Fig. 2.15).

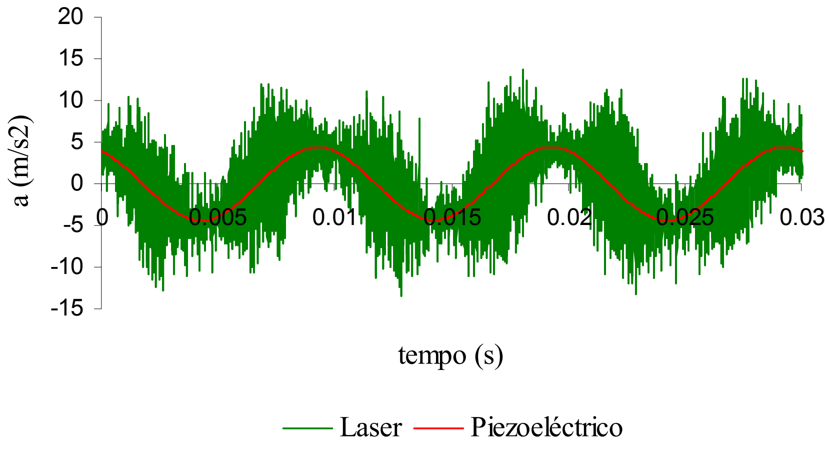


Fig. 2.15 Resposta (aceleração) ao sinal harmónico de 100 Hz adquirido pelos acelerómetro piezoeléctrico e transdutor LASER.

Em particular, enquanto que o sinal obtido pelo transdutor piezoeléctrico se parece claramente com um sinal harmónico, o sinal obtido pelo transdutor LASER parece estar contaminado de ruído, i.e., detecta-se a componente principal a 100 Hz, mas há componentes espectrais residuais de frequência mais elevada com amplitude muito significativa. Pelo contrário, na Fig. 2.11, em que se faz a representação do sinal em termos de velocidade, não se detecta a presença de ruído porque este parece não ter significado. A justificação geralmente apresentada para explicar estas observações está nas operações de derivação e integração a que o sinal é sujeito. A comparação das Fig. 2.11 e Fig. 2.15 merece os seguintes comentários:

- O sinal medido pelo velocímetro LASER é descrito em termos de velocidade, pelo que, para se fazer a sua representação em termos de aceleração, é necessário processá-lo por uma operação de derivação. Suponha-se que o sinal original está contaminado de ruído a frequências muito mais elevadas que a frequência do sinal harmónico emitido pelo excitador electromagnético (frequências essas que poderão ser intrínsecas ao próprio mecanismo de funcionamento do interferómetro LASER - *vide* secção 2.2.2.2; de facto, um dos problemas da interferometria é a contaminação do sinal com ruído causado por vibrações parasitas dos componentes ópticos do interferómetro [46]). Mesmo que amplitude do ruído seja muito mais baixa que a amplitude do sinal harmónico principal em velocidade (sendo o ruído, por isso, pouco visível), quando se deriva o sinal e porque as frequências do ruído são muito mais elevadas, é de esperar que a amplitude da aceleração deste seja “amplificada” em relação à amplitude da aceleração do sinal harmónico principal. Em termos analíticos, pode dizer-se que, para um sinal harmónico:

$$\ddot{x}(t) = i\omega\dot{x}(t) \tag{2.12}$$

o que significa que, para uma velocidade de amplitude constante, a amplitude da aceleração aumenta proporcionalmente à frequência, ou, posto noutros termos, para uma amplitude de aceleração constante a amplitude da velocidade diminui proporcionalmente à frequência. Por outras palavras, o erro relativo aumenta quando a frequência aumenta;

- O sinal medido pelo acelerómetro piezoeléctrico é descrito em termos de aceleração, pelo que, para se fazer a sua representação em termos de velocidade, é necessário processá-lo através de uma operação de integração. Pode fazer-se uma abordagem análoga ao ponto anterior, levando-nos a concluir que o ruído, devido à operação de integração, terá menos significado quando o sinal é representado em termos de velocidade do que quando o sinal é representado em termos de aceleração. Contudo, parece que neste caso poderá haver uma questão adicional: Considerando que o ruído é ruído branco[11], então, por definição, o seu valor médio (integral) será nulo. Pode dizer-se então que, nestas condições, a operação de integração de um sinal temporal corresponde à aplicação de um filtro.

A análise levada a cabo acima não exclui a hipótese de poder haver outras razões para que levem à ocorrência dos factos mencionados, nomeadamente características dos equipamentos que exigirão, porventura, conhecimentos mais profundos nessa especialidade.

[11] O ruído branco é um tipo de sinal em que a amplitude espectral é constante para todas as frequências da banda que é gerada [48].

2.3.2. AVALIAÇÃO DO RUÍDO NOS SINAIS DOS TRANSDUTORES

2.3.2.1. ABORDAGEM AO PROBLEMA

Os transdutores estão ligados a um conjunto complexo de aparelhagem electrónica cujas fontes de alimentação eléctrica poderão introduzir ruído nos sinais. Embora se espere que este ruído não tenha significado, poderá ser interessante tentar quantificá-lo de forma a que se tenha uma perspectiva da ordem de grandeza a partir da qual os resultados poderão não fazer sentido (nomeadamente, aquando do aparecimento de anti-ressonâncias nas FRF's).

O procedimento utilizado para a avaliação da influência dos aparelhos nos sinais baseia-se num procedimento experimental típico, mas em que o ensaio é "pseudo-estático", i.e., em condições ideais, porque não se pretende emitir qualquer sinal ao excitador electromagnético, os transdutores não deveriam medir qualquer resposta dinâmica.

2.3.2.2. MONTAGEM EXPERIMENTAL E CONDUÇÃO DO ENSAIO

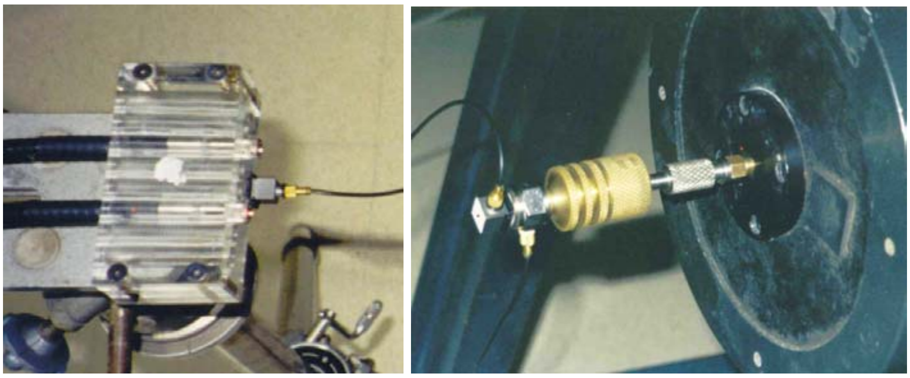


Fig. 2.16 Montagem experimental concebida para a execução dos ensaios de ruído – à esquerda, tem-se um pormenor da colocação do acelerómetro B&K 4508B no suporte acrílico e à direita, tem-se um pormenor da ligação entre fita reflectora, acelerómetro B&K 4507, transdutor de força e excitador electromagnético.

Neste ensaio pretende-se medir o ruído eléctrico que se propaga pela cadeia de medição. Para isso, introduz-se, através do excitador electromagnético, uma solicitação que pretende traduzir esse ruído. A montagem foi executada à semelhança do que foi feito em 2.3.1.2, embora tenha sido utilizado um transdutor suplementar, o acelerómetro piezoeléctrico

B&K 4508B, colocado no suporte acrílico dos canais do transdutor LASER para avaliar a estabilidade do tripé de suporte[12]. Os pormenores da montagem experimental apresentam-se na Fig. 2.16.

Este ensaio consiste na realização de três medições independentes, que diferem entre si apenas pela configuração do amplificador de sinal (dispositivo de controlo do sinal emitido para o excitador electromagnético). No amplificador de sinal existe um botão que pode ocupar uma de três posições: desligado (*off*), ligado (*on*) e em carga (*load*). Na segunda posição não é possível excitar a estrutura, i.e., amplificar o sinal através da regulação do ganho; no entanto o circuito eléctrico é aberto.

2.3.2.3. RESULTADOS

Da realização dos ensaios de ruído conforme descritos nas secções 2.3.2.1 e 2.3.2.2, obtiveram-se 3 conjuntos de curvas para cada transdutor de resposta conforme ilustrado nas Fig. 2.17, Fig. 2.18 e Fig. 2.19.

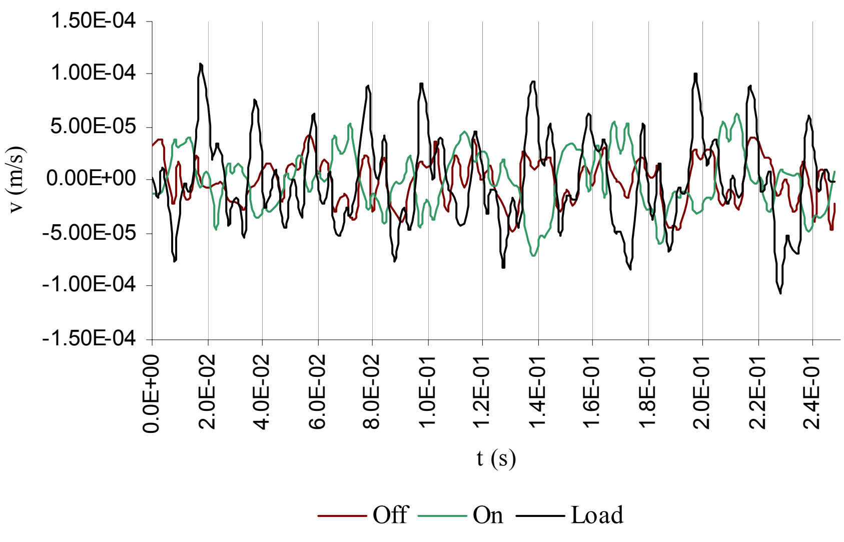


Fig. 2.17 Sinais no tempo obtidos pelo transdutor LASER para as três situações contempladas no ensaio de ruído.

[12] Refira-se que o tripé estava apoiado numa superfície (maciço) anti-vibratória.

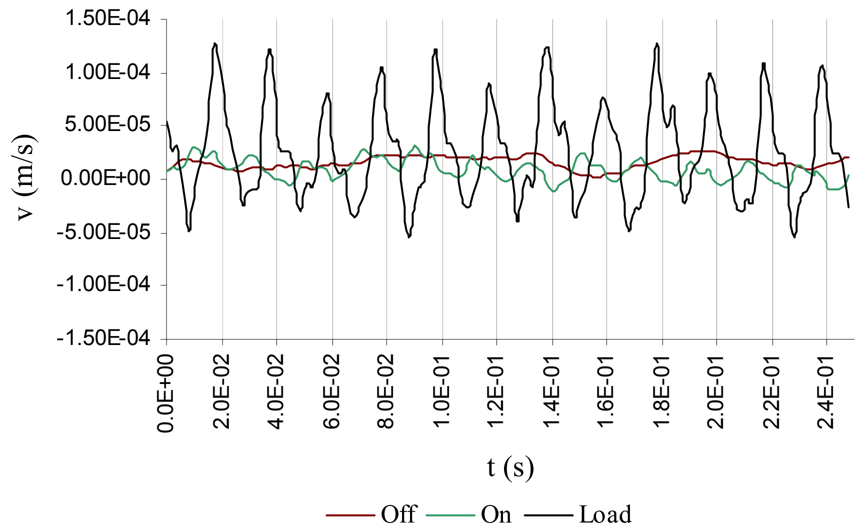


Fig. 2.18 Sinais no tempo obtidos pelo acelerómetro piezoeléctrico B&K 4507 para as três situações contempladas no ensaio de ruído.

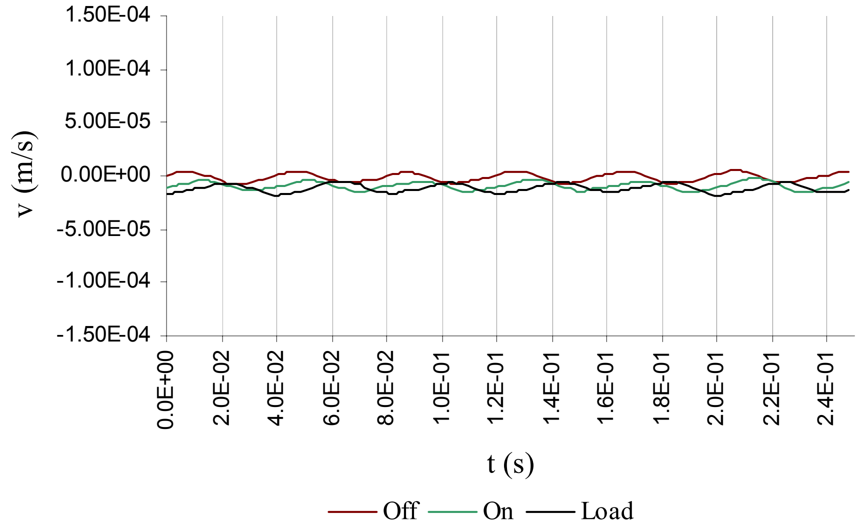


Fig. 2.19 Sinais no tempo obtidos pelo acelerómetro piezoeléctrico B&K 4508B (colocado no suporte acrílico) para as três situações contempladas no ensaio de ruído.

As linhas verticais auxiliares destas figuras foram colocadas com um espaçamento de 20ms (correspondente a uma frequência 50 Hz) por se detectarem de forma clara e imediata componentes a esta frequência nas Fig. 2.17 e Fig. 2.18. Quando o amplificador de sinal está em carga (*load*), esta periodicidade é mais evidente. Parece ser claro que se trata de ruído eléctrico, que se transmite a uma frequência de 50 Hz em Portugal, e que está a interferir com o vibrador electromagnético e, por isso, a ser medido pelos transdutores. Esta periodicidade de 20ms pode também ser observada na Fig. 2.18 quando o amplificador está apenas ligado (*on*), não sendo tão claro na Fig. 2.17, já que a influência deste sinal eléctrico parece "confundir-se" com o ruído inerente ao sinal do transdutor LASER. De facto, observa-se um pequeno aumento na amplitude do sinal do transdutor LASER quando o amplificador de sinal passa do estado de desligado (*off*) a ligado (*on*).

No que diz respeito à Fig. 2.19, pode verificar-se, por um lado, que não houve alterações visíveis no sinal do acelerómetro colocado no suporte acrílico das lentes do transdutor LASER (colocado sobre o tripé); por outro lado, a ordem de grandeza da amplitude do sinal indicia que a oscilação do sinal seja em parte fruto de imprecisão experimental do equipamento e que, a ter origem em perturbações exteriores, não parece pôr a instalação experimental em compromisso.

Finalmente, resta referir que o sinal do transdutor LASER parece ser mais ruidoso que o sinal do acelerómetro quando comparadas as curvas das Fig. 2.17 e Fig. 2.18 no caso do amplificador estar desligado (*off*) ou apenas ligado (*on*). Porém, não parece que esta situação seja problemática ou que vá ter influência em resultados recolhidos em situações de solicitação dinâmica real, atendendo à ordem de grandeza do sinal quando comparado com os sinais das Fig. 2.11 e Fig. 2.12 referentes aos ensaios no tempo descrito na secção 2.3.1; pelo menos no que diz respeito à representação do sinal em termos de velocidade e desde que o ganho seja suficientemente elevado[13].

Quando se faz a recolha do sinal representado nas Fig. 2.17 e Fig. 2.18 com uma resolução maior, i.e., se reduz o espaçamento entre cada ponto medido, observa-se uma situação curiosa que poderá ainda fornecer alguns esclarecimentos relativamente à problemática da diferenciação numérica referida na secção 2.3.1.3. Observem-se então as Fig. 2.20 e Fig.

[13] Na verdade, como a utilização deste equipamento vai servir, no âmbito deste trabalho, fundamentalmente para medir funções de transferência em que se relaciona o sinal de entrada com o sinal de saída, e considerando que os sistemas são lineares, não houve preocupação em definir o que se poderá entender por "ganho elevado". Quando foram feitos os ensaios de ganho (*vide* secção 2.3.4), compreendeu-se que este é na realidade importante para a qualidade dos resultados, tendo-se conseguido encontrar um valor adequado.

2.21, que correspondem às Fig. 2.17 e Fig. 2.18, respectivamente, quando obtidas para uma resolução maior[14].

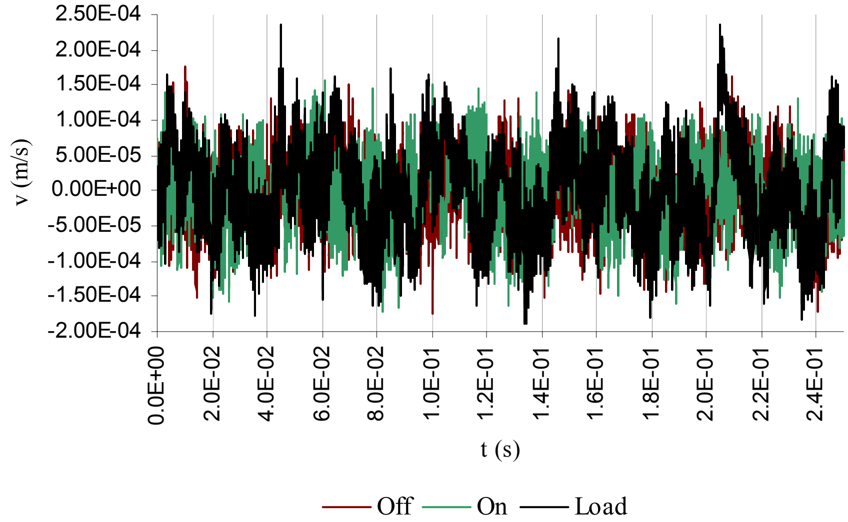


Fig. 2.20 Sinais no tempo obtidos em alta resolução pelo transdutor LASER para as três situações contempladas no ensaio de ruído.

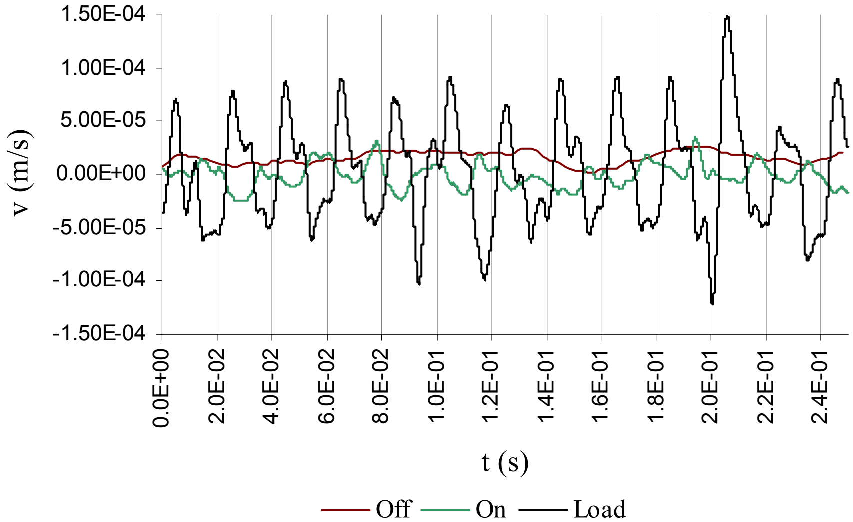


Fig. 2.21 Sinais no tempo obtidos em alta resolução pelo acelerómetro piezoeléctrico B&K 4507 para as três situações contempladas no ensaio de ruído.

---

[14] Em concreto, o intervalo de amostragem das Fig. 2.17 e Fig. 2.18 é de 1.95×10^{-3} s enquanto que o intervalo de amostragem das Fig. 2.20 e Fig. 2.21 é de 3.05×10^{-5} s.

A Fig. 2.20 apresenta-se muito mais ruidosa que a Fig. 2.17; contudo, a Fig. 2.21 não apresenta alterações de maior à Fig. 2.18. Na Fig. 2.20 observam-se componentes espectrais a alta frequência cujo aparecimento pode ter origem no princípio de funcionamento do interferómetro LASER (*vide* secção 2.2.2.2). No que diz respeito à ordem de grandeza do sinal, esta praticamente não se alterou pelo que as considerações tomadas anteriormente no que diz respeito à influência do ruído nos sinais se mantêm.

É importante ainda salientar que a Fig. 2.20 vem ilustrar a explicação dada na secção 2.3.1, que o sinal temporal do LASER representado em termos de aceleração parece ser mais ruidoso que quando representado em termos de velocidade, pela simples razão do ruído existente no sinal (expresso em termos de velocidade na Fig. 2.20) ter taxas de variação muito bruscas (alta frequência) embora seja de baixa amplitude.

2.3.3. ENSAIOS EM FREQUÊNCIA E CALIBRAÇÃO DOS TRANSDUTORES

2.3.3.1. ABORDAGEM AO PROBLEMA

Os ensaios em frequência são aqueles que permitem caracterizar o sistema pelo modelo de resposta definido na secção 2.1, i.e., através de uma Função de Resposta em Frequência (FRF) que relaciona o sinal de entrada (força) com o sinal de saída (resposta).

Para se caracterizar o modelo de resposta é essencial definir uma gama de frequências na qual se pretende analisar o comportamento dinâmico do sistema. Geralmente, a sua escolha dependerá essencialmente da gama de frequências a que a estrutura é solicitada dinamicamente em serviço; como neste caso se trata de um trabalho de investigação, esta escolha depende fundamentalmente dos objectivos pretendidos, das condições experimentais e das características dos equipamentos utilizados, nomeadamente, gama de frequências de utilização dos transdutores e características das ligações.

Se às montagens experimentais forem atribuídas algumas características específicas e bem definidas, poder-se-á ainda proceder, com alguma facilidade, não só à comparação das FRF's obtidas pelos diferentes transdutores, mas também à:

- Calibração dos pares transdutor de força / transdutor de resposta;

- Determinação da massa activa do transdutor de força (conceito definido em 2.2.3.2).

São estes dois pontos que serão abordados nas secções que se seguem.

2.3.3.2. DESCRIÇÃO DA TÉCNICA DE CALIBRAÇÃO UTILIZADA

Os valores recolhidos pelo equipamento de medição representam tensões eléctricas e portanto é necessário obter um factor de calibração que traduza estes valores em unidades dinâmicas. Por outro lado, a sensibilidade anunciada pelo fabricante pode não ser suficientemente precisa uma vez que pode variar com o decorrer do tempo e em função das condições ambientais. Pode ainda acontecer que o transdutor sofra de alguma deficiência devida a manuseamento incorrecto, apesar de ainda funcionar, podendo até ter-se perdido a linearidade na resposta. Finalmente, as restantes entidades da cadeia de medição (v.g., cabos, unidades de processamento de sinal, etc.) podem alterar a sensibilidade global, embora de forma menos significativa [4].

Quando se medem curvas de resposta em frequência (FRF's) a preocupação incide no valor da relação resposta/força e não nos valores individuais de cada uma destas quantidades. Este facto permite o uso de uma técnica precisa, eficaz e de fácil aplicação na calibração de transdutores, incluindo a influência das restantes unidades que fazem parte do equipamento de medição, e que está bem definida em [4]. Esta técnica requer apenas o uso de uma estrutura rígida em conjunto com o equipamento que irá ser usado nas medições das FRF's[15].

Para cada transdutor de resposta é necessário proceder-se a um teste de calibração que envolve simultaneamente o transdutor de resposta e o transdutor de força. Com a aplicação de uma força variável no tempo a um bloco rígido de massa conhecida, pode obter-se um valor em unidades de volt/volt que corresponde a (para um sinal harmónico):

---

[15] A FRF deverá ser calculada na forma de uma acelerância, como será fácil constatar adiante por observação da expressão (2.13) que não é mais do que uma forma de escrever a 2ª Lei de Newton.

$$A(\omega) = \frac{\ddot{X}}{F} = \frac{1}{m} \tag{2.13}$$

em que $A(\omega)$ é a acelerância, $\ddot{X}$ é a amplitude da aceleração F é a força de solicitação e m é a massa do bloco (que pode incluir a massa adicional dos transdutores). Assim, a acelerância medida terá um valor constante proporcional à massa do bloco, dentro de uma gama de frequências suficientemente baixa para que o bloco se comporte como um corpo rígido.

Este método ignora que os transdutores tenham sensibilidades individuais, e deve ser efectuado para cada par transdutor de resposta - transdutor de força.

2.3.3.3. DETERMINAÇÃO DA MASSA ACTIVA DO TRANSDUTOR DE FORÇA - MÉTODO ITERATIVO COM A CALIBRAÇÃO DA INSTRUMENTAÇÃO

A determinação experimental da massa activa do transdutor de força é feita com base nos mesmos princípios que os enunciados em 2.3.3.2, assumindo, neste caso, que o sistema está devidamente calibrado. O problema que surge numa fase inicial é que a utilização do procedimento descrito em 2.3.3.2 parte do princípio de que a massa do sistema é conhecida com alguma precisão. Acontece que o valor da massa activa do transdutor de força não é inicialmente conhecida, ou pelo menos não há garantia do seu valor exacto. Isto significa que a determinação das constantes de calibração do sistema e determinação da massa activa do transdutor de força são operações recursivas, uma vez que:

- quando se está a calibrar o sistema, não se conhece o valor exacto da massa total de teste por se desconhecer a massa activa do transdutor de força, pelo que a constante de calibração determinada tem um valor aproximado;
- quando se está a determinar a massa activa do transdutor de força tem que se assumir que o sistema está correctamente calibrado (o valor da constante de calibração não deve ser aproximado, já que esse erro propagar-se-á durante o cálculo da massa activa);

Então, têm-se duas alternativas durante o procedimento de calibração apresentado na secção acima: desprezar o valor da massa activa (caso esta seja de valor muito inferior ao da estrutura rígida em teste) ou então arbitrar o seu valor (o transdutor de força Brüel &

Kjær 8200, apresentado na Fig. 2.5 da secção 2.2.3, tem, tipicamente, uma massa de base de 3g e uma massa de topo de 18g [4]). Encontrada a constante de calibração para um par transdutor de resposta / transdutor de força, executa-se um novo ensaio, mas desta vez sem a utilização da estrutura anterior (poder-se-á dizer que o sistema agora é constituído apenas pelos transdutores). Considerando que a constante de calibração determinada anteriormente está correcta, determina-se a massa activa do transdutor de força uma vez que se conhecem as massas de todos os outros elementos do sistema. Volta a determinar-se a constante de calibração dos pares transdutor de força / transdutor de resposta, mas desta vez considera-se o valor da massa activa calculada em vez de se desprezar ou arbitrar o seu valor. Obtido um novo valor para a constante de calibração, está-se em condições de apurar o valor da massa activa com maior precisão. Como é evidente, este método é iterativo e é válido a partir do momento em que se verifique convergência.

Uma vantagem deste método consiste em que, independentemente do número de iterações realizadas, os dados experimentais são sempre os mesmos, i.e., só é necessária a realização de dois tipos de ensaios: um com o corpo rígido e outro sem o corpo rígido. Os cálculos resultam apenas de manipulação numérica sem que seja necessário aumentar a complexidade experimental.

2.3.3.4. MONTAGEM EXPERIMENTAL E CONDUÇÃO DOS ENSAIOS

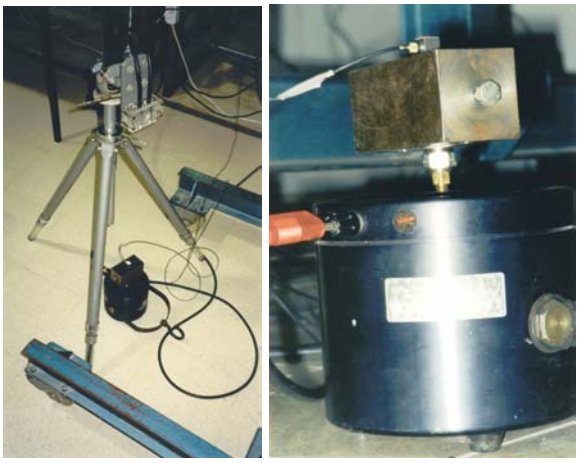


Fig. 2.22 Montagem experimental realizada para calibração dos pares transdutor de resposta - transdutor de força.

Nesta secção é executada a calibração do acelerómetro piezoeléctrico B&K 4507 e dos dois canais (designados por "Canal A" e por "Canal B") do transdutor LASER e é determinada a massa activa do transdutor de força de acordo com a técnica iterativa descrita na secção 2.3.3.3.

Na Fig. 2.22 apresenta-se a montagem experimental em que são visíveis o transdutor de força, o vibrador electromagnético, o acelerómetro piezoeléctrico, o bloco em aço e a fita reflectora com o feixe de LASER incidente. Esta montagem tem como fim a calibração do sistema de medição.

A segunda montagem experimental, utilizada para determinar a massa activa do transdutor de força, é igual à apresentada na Fig. 2.10 (pág. 23).

As massas que se conhecem são as seguintes:

- Bloco em aço (com elementos de ligação adicionais para transdutores) - 1849g;
- Acelerómetro piezoeléctrico - 4.8g.

Os ensaios para calibração da sensibilidade global foram realizados fazendo um varrimento numa gama de frequências dos 0 Hz aos 800 Hz com a excitação do tipo aleatório (ruído branco). O motivo pelo qual se limitou superiormente a gama de frequências a 800 Hz tem que ver com dois factores fundamentais:

- Ser esse o intervalo de frequências coincidente com o que se utilizará no modelo experimental concebido no capítulo 3;
- As características das ligações entre componentes. A empresa MRA Instrumentação, aconselha a que a utilização da cola HBM – Schnellklebstoff X60 não seja feita para frequências superiores a 800 Hz.

2.3.3.5. RESULTADOS - CALIBRAÇÃO E MASSA ACTIVA

A Fig. 2.23 ilustra uma curva típica de calibração obtida através do método descrito em 2.3.3.2 para o par transdutor de força / acelerómetro piezoeléctrico.

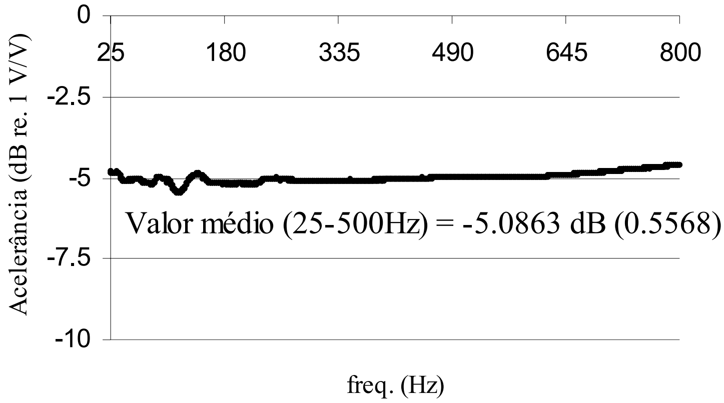


Fig. 2.23 Curva de calibração obtida para o par transdutor de força / acelerómetro piezoeléctrico (com bloco rígido).

A partir dos cerca de 600 Hz a função acelerância deixa nitidamente de ter um comportamento constante em torno de um valor médio, o que pode significar que se está a excitar um modo de rotação do bloco (por não se conseguir garantir que se esteja a aplicar a força exactamente no seu centro) ou que poderão estar a surgir efeitos derivados da elasticidade da cola. Por outro lado, abaixo dos 25Hz a incerteza experimental é relativamente elevada devido à irregularidade da resposta. Assim, decidiu-se calcular o valor médio da função para uma gama de frequências compreendida entre os 25 e os 500 Hz, o que já é suficiente para se ter uma boa aproximação da constante de calibração.

O valor médio da FRF apresentada acima é de 0.5568 V/V entre os 25 e os 500 Hz, ao que corresponde o valor inverso de 1.796 V/V. Atendendo à expressão (2.13) e a que se desprezou a massa activa do transdutor de força (a massa do corpo rígido vale 1.8538kg), tem-se que a sensibilidade global, neste caso, é de $1.0322\frac{\mathrm{V/V}}{\mathrm{N/ms^{-2}}}$. O valor desta sensibilidade global, embora se acredite estar muito próximo do real, ainda é grosseira atendendo a que se desprezou a massa activa do transdutor de força. Esta pode ser determinada realizando um outro ensaio, agora sem a utilização do bloco rígido. O resultado apresenta-se na Fig. 2.24.

Neste caso, até aos 800 Hz a função acelerância é aproximadamente constante. Assim, o valor médio da FRF apresentada abaixo é de 38.1788 V/V entre os 25 e os 800 Hz, ao que corresponde o valor inverso de 26.193×10^{-3} V/V. Usando novamente a expressão (2.13) e considerando a sensibilidade global determinada ($1.0322 \frac{V/V}{N/ms^{-2}}$) então a massa do corpo rígido vale 26.193g. Como o acelerómetro, seu suporte, suporte do transdutor de força e cola totalizam uma massa de 6.743g, então, a massa activa do transdutor de força no final desta 1ª iteração é 19.450g.

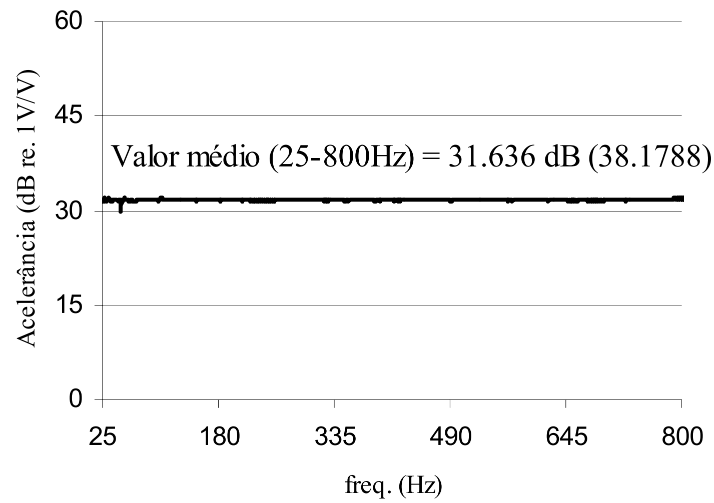


Fig. 2.24 Curva de calibração obtida para o par transdutor de força / acelerómetro piezoeléctrico (sem bloco rígido).

Com este valor da massa activa do transdutor de força, volta-se a calcular a sensibilidade global do conjunto transdutor de resposta / transdutor de força, estando-se então em condições de refinar o valor da massa activa do transdutor de força. Este processo repete-se tantas vezes quantas as necessárias para se atingir uma tolerância do erro predefinida. Uma das técnicas mais populares para terminar o processo iterativo consiste em testar a diferença entre dois valores consecutivos x_{n-1} e x_n, e compará-la com uma tolerância τ especificada [49]. Concretamente, se:

$$|x_n - x_{n-1}| < \tau \tag{2.14}$$

então o processo iterativo é parado na iteração n. Uma variante desta técnica, que tem a vantagem de ser indiferente à escala dos números $x_0, x_1, ..., x_n$, é a seguinte:

$$|x_n - x_{n-1}| < \tau' |x_n| \tag{2.15}$$

em que τ' é o novo valor da tolerância.

Na Tabela 2.1 apresentam-se os resultados obtidos em todas as iterações por forma a que a tolerância do erro tanto da massa activa como da constante de calibração seja inferior a 0.010%. Embora esta tolerância do erro possa parecer muito apertada, o processo converge em apenas 4 iterações.

		Sensibilidades Globais $\left(\frac{V/V}{N/ms^{-2}}\right)$			Massa Activa (g)
		Acelerómetro	LASER A	LASER B	
Estimativa Inicial	x_0	1.0	1.0	1.0	0.0
	τ_0'	-	-	-	-
1ª Iteração	x_1	1.032168	1.024108	1.060434	19.44980
	τ_1'	3.117%	2.354%	5.699%	100.000%
2ª Iteração	x_2	1.042997	1.034853	1.071559	19.72461
	τ_2'	1.038%	1.038%	1.038%	1.393%
3ª Iteração	x_3	1.043150	1.035004	1.071717	19.72849
	τ_3'	0.015%	0.015%	0.015%	0.020%
4ª Iteração	x_4	**1.043152**	**1.035007**	**1.071719**	**19.72854**
	τ_4'	1.92×10^{-4}%	2.90×10^{-4}%	1.87×10^{-4}%	2.74×10^{-4}%

Tabela 2.1 Determinação das sensibilidades globais dos pares transdutor de força - transdutor de resposta e massa activa do transdutor de força.

Os valores das sensibilidades globais apresentados na Tabela 2.1 devem ser utilizados como factor de correcção aos resultados obtidos por via experimental antes do processamento de dados, bastando para isso efectuar o quociente entre as acelerâncias experimentais e a sensibilidade global[16].

---

[16] Note-se ainda que, nos ensaios realizados para a determinação destas constantes de calibração, se consideraram as sensibilidades anunciadas pelo fabricantes dos transdutores, i.e., esses valores foram introduzidos na configuração do procedimento experimental, nomeadamente na aplicação informática de aquisição e processamento de sinal utilizada (*PULSE Labshop* da B&K). Deste modo, as sensibilidades globais calculadas só farão sentido quando referidas às sensibilidades constantes das cartas de calibração.

Repare-se ainda que o valor obtido para a massa activa do transdutor de força, apresenta uma discrepância de 9.6% relativamente ao valor atrás referido de 18g.

2.3.3.6. RESULTADOS - COMPARAÇÃO ENTRE FRF'S

Apesar das recomendações dadas no sentido de limitar o intervalo de frequências em que devem ser executados os ensaios (0 a 800 Hz - *vide* secção 2.3.3.4), decidiu-se, nos ensaios de avaliação das curvas de resposta em frequência, alargar esse intervalo até aos 6400 Hz. Esta opção teve como objectivos, por um lado, cobrir uma gama de frequências suficientemente abrangente para que pudesse ser representativa das gamas que são habitualmente praticadas em análise modal e, por outro lado, garantir que os elementos da cadeia de medição deixassem, a determinada altura, de se comportar como massas rígidas. A montagem efectuada, em que a "estrutura de teste" são os próprios transdutores (Fig. 2.10, pág. 23), resultou na FRF apresentada na Fig. 2.25.

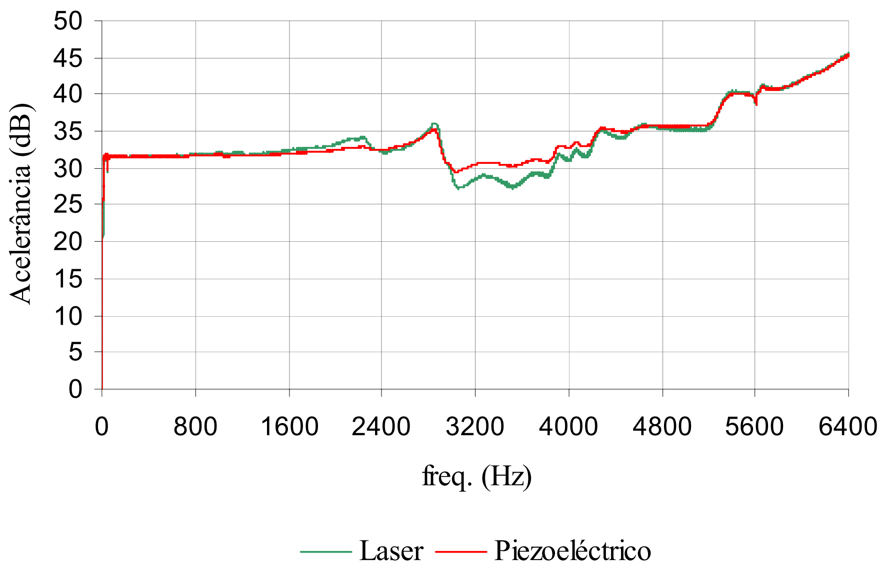


Fig. 2.25 Amplitude das FRF's (acelerâncias) adquiridas pelos transdutor LASER e transdutor piezoeléctrico para o ensaio de comparação entre FRF's.

Esta figura ilustra que há diferenças entre os sinais obtidos por ambos os transdutores, embora não seja suficientemente clara por forma a que se possam quantificar essas diferenças. Deste modo, apresenta-se na Fig. 2.26 uma função que corresponde há amplitude da razão entre a acelerância obtida pelo transdutor LASER e a acelerância obtida pelo transdutor piezoeléctrico.

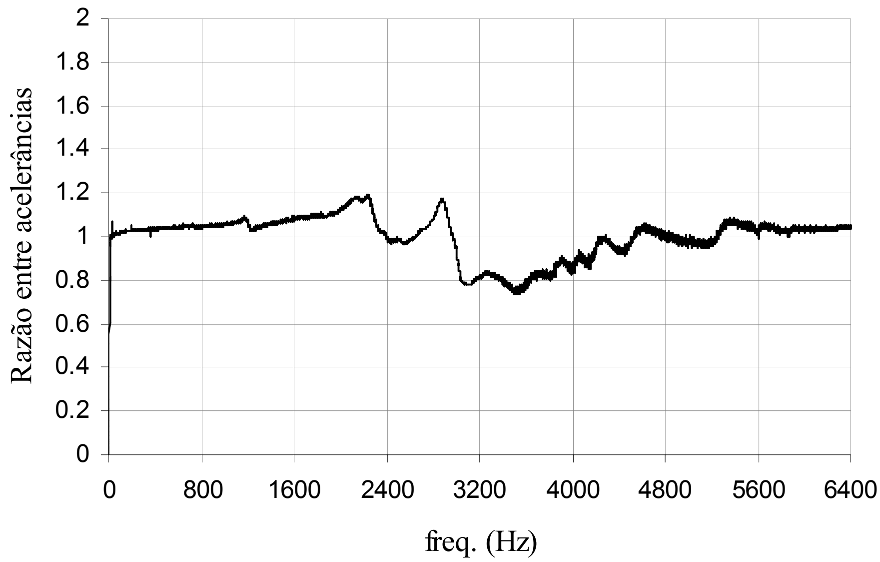


Fig. 2.26 Amplitude do quociente entre a acelerância obtida pelo transdutor LASER e a acelerância obtida pelo transdutor piezoeléctrico para o ensaio de comparação entre FRF's.

Como é possível verificar na Fig. 2.25, até aos 800 Hz (valor de frequência máxima recomendado para utilização da cola) a função acelerância obtida por ambos os transdutores de resposta é praticamente constante, uma vez que o sistema se comporta como uma massa rígida. A Fig. 2.26 permite verificar que, para esta gama de frequências, a razão entre ambas as funções é aproximadamente unitária, situação que seria de esperar. Neste mesmo intervalo, a função quociente tem um valor médio de 1.032 em que se registam os valores máximo e mínimo de 1.056 e 0.976 respectivamente, pelo que as discrepâncias máxima e média do valor obtido pelo LASER relativamente ao valor obtido pelo acelerómetro piezoeléctrico são de 5.6% e 3.2% respectivamente.

Aumentando a amplitude da gama de frequências em estudo até aos 1500 Hz (valor máximo recomendado para utilização do acelerómetro sem cera), a função quociente tem um valor médio de 1.043 em que se registam os valores máximo e mínimo de 1.097 e 0.976 respectivamente, pelo que as discrepâncias máxima e média do valor obtido pelo LASER relativamente ao valor obtido pelo acelerómetro piezoeléctrico são de 9.7% e 4.3% respectivamente. Isto significa que a discrepância entre o sinal medido pelo velocímetro LASER e pelo acelerómetro piezoeléctrico está a aumentar com a frequência. Esta diferença começa a tomar mais significado a partir dos cerca de 1600 Hz, em que se observa uma "separação" entre ambas as FRF's representadas na Fig. 2.25.

A partir dos 1600 Hz e até cerca dos 4800 Hz, as FRF's começam a apresentar diferenças muito acentuadas cujas razões poderão estar relacionadas com inúmeros factores, nomeadamente:

- Efeitos relacionados com o contacto entre o acelerómetro e o seu apoio acima dos 1500 Hz por não ter sido utilizada cera de fixação;
- Efeitos relacionados com a fita retroreflectora no que diz respeito à sua colagem no acelerómetro;
- Eventual rotação do acelerómetro em torno de eixos não perpendiculares ao plano da fita reflectora poderão alterar a resposta lida pelo transdutor LASER.
- Efeitos resultantes do comportamento da cola acima dos 800 Hz;
- Efeitos relacionados com as respostas em frequência dos transdutores.

Um fenómeno particularmente interessante ocorre a partir dos 4800 Hz quando as FRF's tendem a coincidir novamente. No entanto, o sistema, constituído pelos transdutores e elementos ligantes já não deverá estar a ter comportamento de corpo rígido.

A qualidade dos sinais pode ser avaliada pela função de coerência, apresentada na Fig. 2.27.

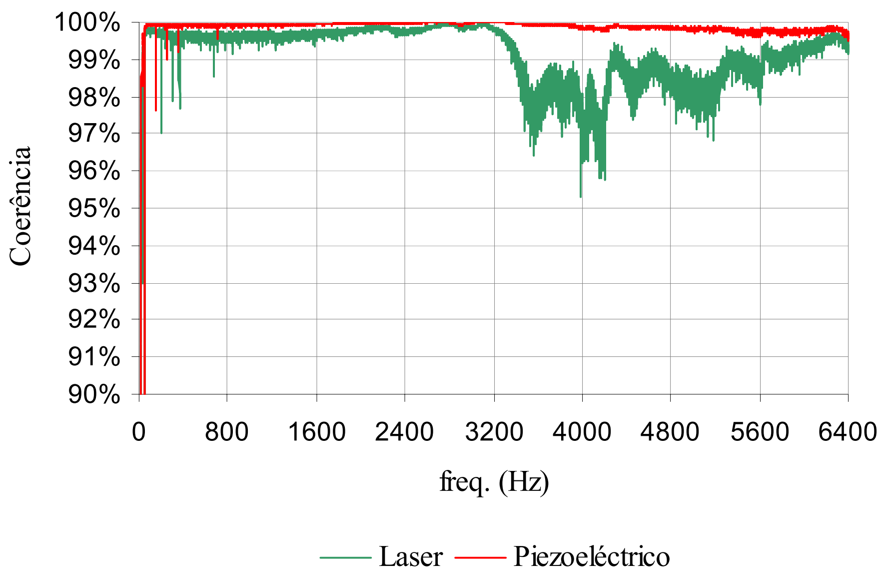


Fig. 2.27 Coerência dos sinais dos transdutores LASER e piezoeléctrico para o ensaio de comparação entre FRF's.

Nesta figura é possível verificar que até cerca dos 3200 Hz a função de coerência de ambos os transdutores se encontra acima dos 99%, registando-se na maior parte desse período valores superiores a 99.8%. A partir dos 3200 Hz, a coerência do LASER decresce para valores compreendidos entre os 95% e os 99%, o que pode ajudar a fundamentar as discrepâncias encontradas nas Fig. 2.25 e Fig. 2.26.

2.3.4. ENSAIOS DE GANHO

2.3.4.1. ABORDAGEM

Do ponto de vista analítico, para diferentes ganhos, as funções de resposta em frequência não são alteradas, uma vez que a amplitude da resposta é directamente proporcional à amplitude da perturbação[17]. Daí o modelo de resposta corresponder a uma forma de descrição do comportamento dinâmico da estrutura. Contudo, verifica-se experimentalmente que diferentes valores do ganho podem alterar a qualidade dos resultados.

Por um lado, um ganho baixo pode tornar excessivamente significativos os erros, pois a amplitude da resposta pode ser de ordem de grandeza próxima da incerteza experimental e numérica. Por outro lado, com um ganho excessivamente elevado podem aparecer problemas de não-linearidade (tanto associados à resposta da estrutura como ao próprio excitador), problemas relacionados com as juntas (nomeadamente em elementos roscados ou colados), acrescendo o facto de que os equipamentos podem acusar sobrecarga (*overload*).

Portanto, há que escolher um ganho adequado que permita minimizar a introdução deste tipo de incertezas nos resultados obtidos experimentalmente, o que resulta em parte da sensibilidade e experiência do experimentalista bem como das características específicas do equipamento.

[17] No caso de sistemas lineares.

No seguimento das ideias expressas nos parágrafos anteriores, considerou-se oportuno realizar um estudo no sentido de avaliar qual o intervalo de ganho adequado a aplicar em futuros ensaios experimentais. De facto, verificou-se que há alterações no desempenho do transdutor LASER, bem visíveis nas curvas de coerência que traduzem a qualidade do seu sinal.

2.3.4.2. MONTAGEM EXPERIMENTAL E CONDUÇÃO DO ENSAIO

Um dos tipos de solicitação mais usuais é a solicitação aleatória[18] (*random*), nomeadamente o ruído branco. Este sinal é pouco audível e dificilmente se consegue ter uma percepção sensorial do ganho que se está a introduzir no ensaio. Já o multiseno[19] (*multisine*) é perfeitamente audível mesmo para ganhos relativamente baixos, permitindo algum controlo por parte do ouvido humano. À parte de todas as vantagens e desvantagens que estes sinais possam apresentar quando confrontados um com o outro, este facto, relacionado com a audição humana, permitiu colocar em causa se as amplitudes das solicitações que haviam sido definidas até então teriam sido as melhores.

O ensaio consistiu em medir, para uma mesma montagem experimental, a FRF de uma viga em aço numa coordenada e a coerência do sinal para dois ganhos diferentes. O ensaio foi realizado para uma gama de frequências compreendida entre os 0 e 800 Hz cujo sinal da solicitação é o multiseno.

---

[18] O sinal aleatório (*random*) – ruído branco (*vide* definição na nota de pé de página 11 da página 29) - é um sinal em que as amplitudes das componentes espectrais variam ao longo das sucessivas amostras segundo uma distribuição normal. Este tipo de sinal é normalmente utilizado em análise modal. Como desvantagens, provoca um efeito de *leakage* elevado (é necessário utilizar uma janela do tipo *Hanning*) e os ensaios são normalmente demorados uma vez que é necessário efectuar médias [50].

[19] O sinal multiseno (*multisine*) é um sinal periódico em que as componentes (ou linhas) espectrais têm todas a mesma amplitude. Apresenta como vantagens não provocar o efeito de *leakage* usando janela uniforme (se o período do sinal for igual ao período de análise), ter uma relação sinal/ruído elevada e os ensaios serem rápidos já que não é necessário efectuar médias (caso não exista ruído) [50].

2.3.4.3. RESULTADOS

As Fig. 2.28 e Fig. 2.29 ilustram as curvas de mobilidade e coerência respectivamente obtidas através do canal A do transdutor LASER para duas situações de ganho diferentes.

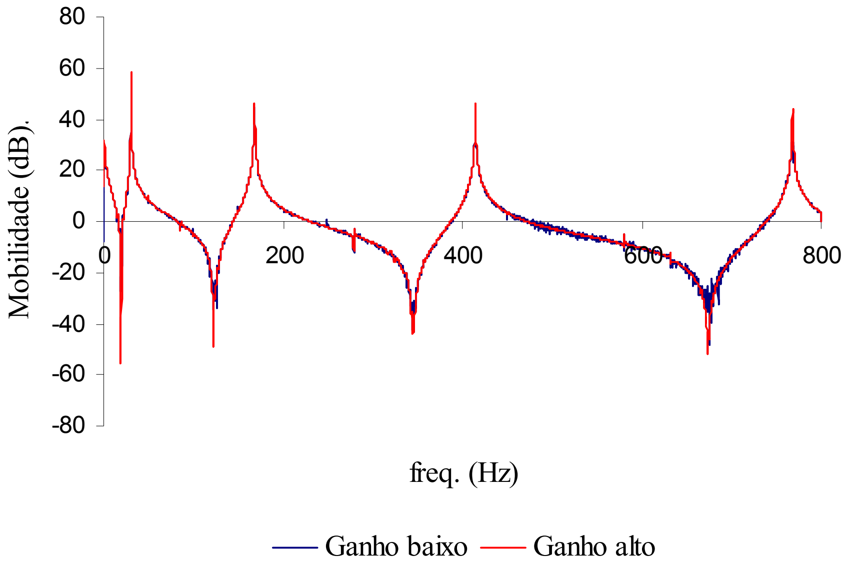


Fig. 2.28 Amplitude das FRF's (Mobilidade) para 2 amplitudes da solicitação (ganhos) diferentes.

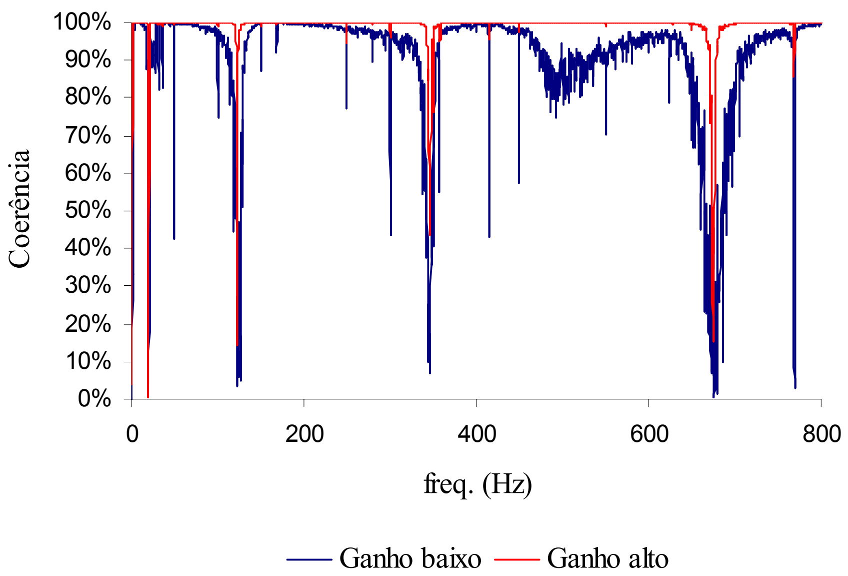


Fig. 2.29 Coerência dos sinais do transdutor LASER para 2 amplitudes da solicitação (ganhos) diferentes.

A análise destas duas figuras permite desde já concluir que o ganho tem um papel importante na qualidade dos resultados, nomeadamente na confiança que estes oferecem, mas não no modelo obtido. Aliás, verifica-se que no intervalo definido, a coerência média do sinal obtido pelo LASER é de 99.9% para um ganho elevado e de 93.9% para um ganho baixo (fora das regiões onde existem anti-ressonâncias).

2.3.5. ENSAIOS DE DISTÂNCIA FOCAL

2.3.5.1. ABORDAGEM, MONTAGEM E CONDUÇÃO DO ENSAIO

Foram realizados ensaios cujo objectivo é avaliar os efeitos da distância do LASER ao alvo de incidência. Para isso fez-se variar a posição do tripé para 4 distâncias: distância mínima de 95mm, duas distâncias intermédias de 340mm e 600mm (esta última sugerida em [45]) e distância máxima de 1535mm. As distâncias mínima e máxima foram escolhidas com base, apenas, na focagem do feixe no alvo, cujo indicador de qualidade é dado por uma barra de estado situada no interferómetro[20].

Os ensaios foram conduzidos sobre uma viga em aço em que se aplicou uma solicitação do tipo multiseno dentro de uma gama de frequências compreendida entre os 0 e os 800 Hz.

2.3.5.2. RESULTADOS

A realização dos 4 ensaios descritos na secção anterior conduziram à obtenção de 4 FRF's e de 4 curvas de coerência que se apresentam sobrepostas nas Fig. 2.30 e Fig. 2.31 respectivamente.

A consistência dos resultados permite concluir que a variação da distância do LASER ao alvo não tem impacto nos resultados, pelo menos para distâncias situadas dentro do intervalo daquelas que foram contempladas (95mm a 1535mm). Fora deste intervalo, supõe-se que os resultados serão igualmente satisfatórios caso se consiga focar o feixe no alvo.

[20] De acordo com o manual do LASER Polytec [45], a barra de estado deve indicar o valor máximo aquando das medições, critério que foi sempre respeitado durante os ensaios.

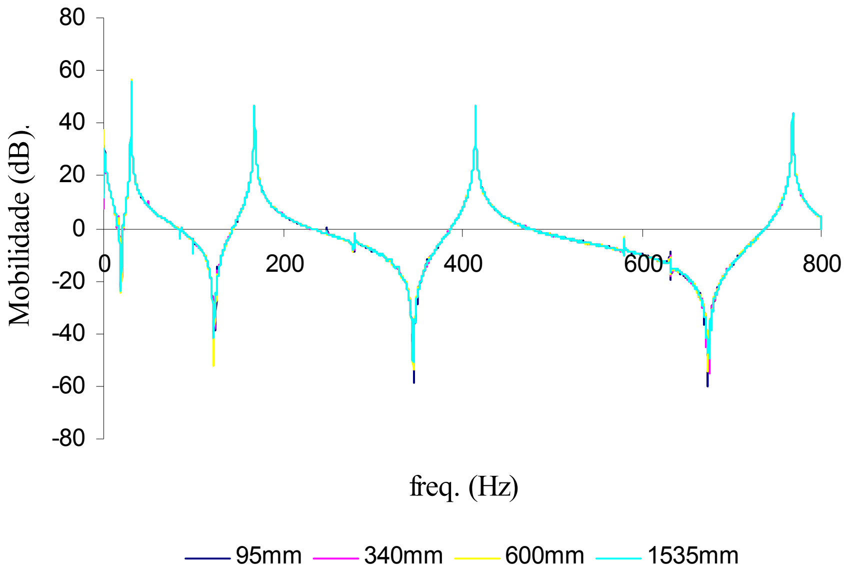


Fig. 2.30 Amplitude das FRF's (Mobilidade) obtidas para 4 distâncias diferentes do LASER ao alvo

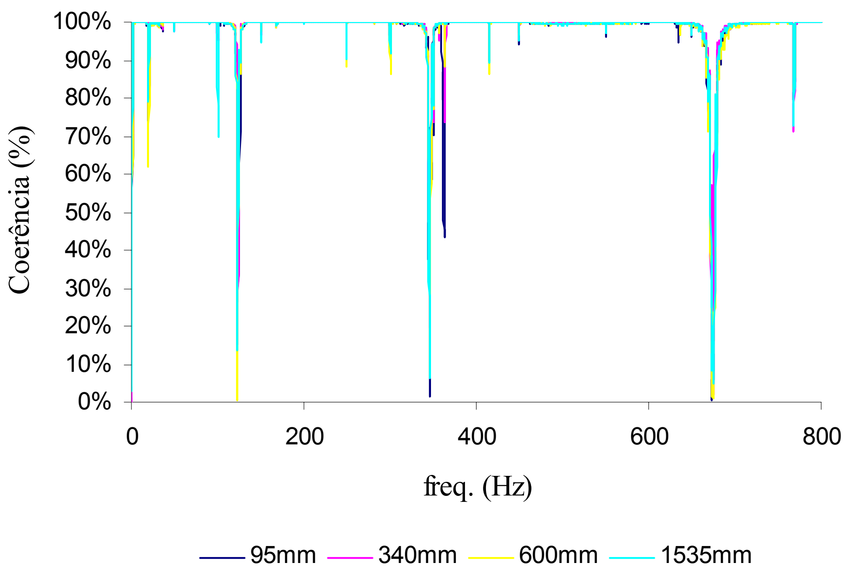


Fig. 2.31 Coerência nos sinais do transdutor LASER para 4 distâncias diferentes do LASER ao alvo

2.3.6. ENSAIOS ÂNGULARES

2.3.6.1. ABORDAGEM AO PROBLEMA

Embora a fita retroreflectora utilizada (3M Scotchlite Diamond) reflicta o feixe de LASER em várias direcções, não sendo por isso necessário que o feixe seja perpendicular à estrutura ou alvo, é importante conhecer quais as implicações que ângulos muito diferentes de 0º possam ter nos resultados obtidos experimentalmente através do transdutor LASER, i.e., "quão perpendicular" deverá estar o feixe em relação ao alvo. Deste modo, foram realizados 2 ensaios que visam tirar conclusões neste campo e ainda no que diz respeito à influência da fita retroreflectora nos resultados.

Caso se consiga focar o feixe de LASER no alvo para ângulos $\theta \neq 0°$ (barra de estado situada no interferómetro deve indicar o valor máximo tal como descrito em 2.3.5) e no caso da direcção da vibração não ser paralela ao feixe de LASER, tem que se ter em atenção que o transdutor LASER não está a medir a velocidade da translação do ponto em que se está a efectuar a medição, mas sim a medir a projecção da velocidade dessa translação no eixo do feixe de LASER tal como ilustrado na Fig. 2.32.

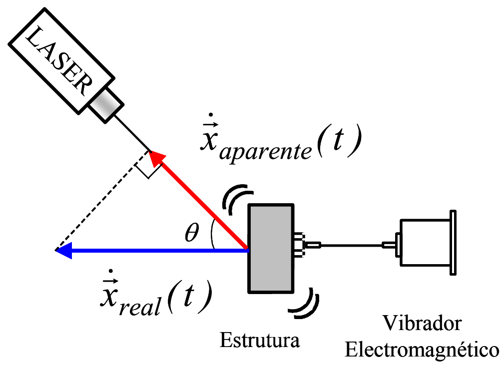


Fig. 2.32 Esquema da medição da velocidade da vibração para ângulos $\theta \neq 0°$

Deste modo, a mobilidade tem que ser corrigida atendendo à relação trigonométrica:

$$Y_{real}(\omega) = \frac{Y_{aparente}(\omega)}{cos(\theta)} \tag{2.16}$$

em que $Y_{aparente}(\omega)$ é a mobilidade medida e $Y_{real}(\omega)$ é a mobilidade correspondente à direcção do movimento.

2.3.6.2. CARACTERÍSTICAS GERAIS DA FITA RETROREFLECTORA

A fita retroreflectora utilizada é uma 3M Scotchlite Diamond Grade 983-10 (104 R-00821) de cor branca. Este tipo de fitas é geralmente utilizado em sinalização de trânsito, estando concebida para reflectir a luz independentemente da sua orientação e dentro de ângulos com amplitude considerável. Embora as especificações sejam bastante detalhadas no que diz respeito aos valores dos coeficientes de retroreflexão mínimos para diferentes ângulos de incidência (-4º, 30º e 40º) e de observação (0.2º, 0.5º e 1.0º), não são conclusivas no que diz respeito à prestação do transdutor LASER aquando da medição de um sinal dinâmico.

Recomenda-se que a fita retroreflectora seja usada à temperatura ambiente (entre os 15ºC e os 38ºC), embora a sua utilização possa ser feita para temperaturas situadas entre os $-12\,^{\circ}$C e os 79ºC em exposição continua e até 121ºC em exposição intermitente. Quando exposta a temperaturas superiores a 177ºC, a fita pode perder permanentemente as suas propriedades.

2.3.6.3. MONTAGEM EXPERIMENTAL E CONDUÇÃO DO ENSAIO

Foram feitas duas montagens experimentais, uma com ângulo de incidência do feixe a 0º e outra com ângulo de incidência do feixe a ≈60º. Enquanto que na 1ª montagem só se mediu a curva de mobilidade utilizando o canal A do LASER, para o segundo ensaio mediu-se a curva de mobilidade, para o mesmo ponto, utilizando ambos os canais, A e B, do LASER. Assim, será ainda possível comparar ambos os canais A e B do LASER para verificar se os resultados obtidos por ambos os canais são coerentes entre si, comparação esta que ainda não havia sido efectuada.

Apresenta-se na Fig. 2.33 uma fotografia da montagem experimental esquematizada na Fig. 2.32, para o 2º ensaio (ângulo de incidência do feixe de 60º).

Fig. 2.33 Montagem experimental realizada para avaliação do efeito do ângulo de incidência do feixe nos resultados.

2.3.6.4. RESULTADOS

A montagem experimental descrita em 2.3.6.3 conduziu à obtenção de 3 curvas de mobilidade cuja amplitude se representa na Fig. 2.34. A coerência dos sinais apresenta-se na Fig. 2.35.

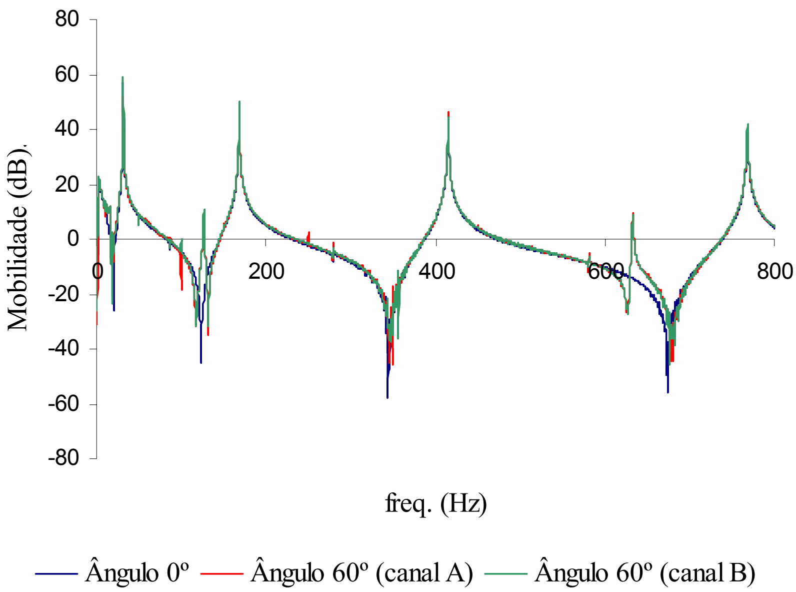


Fig. 2.34 Amplitude das FRF's (Mobilidade) para 2 ângulos de incidência diferentes do eixo do feixe LASER ao alvo.

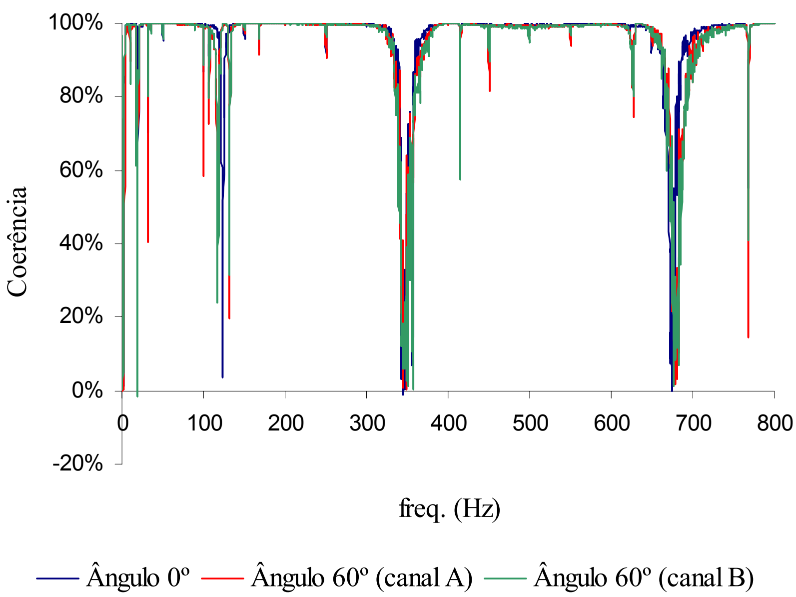


Fig. 2.35 Coerência nos sinais do transdutor LASER para 2 ângulos de incidência diferentes do eixo do feixe LASER ao alvo.

De uma forma geral, pode dizer-se que a alteração do ângulo de incidência do feixe não conduz a alteração na qualidade dos resultados. Por outro lado, a utilização de um ou outro canal do transdutor LASER, também não afectou os resultados.

É possível identificar dois modos na Fig. 2.34, a 127 Hz e a 633 Hz, para um ângulo de incidência de 60º, que não eram visíveis para o caso em que o ângulo de incidência era nulo. Uma vez que a estrutura de teste é a mesma viga em aço que a utilizada nas secções 2.3.4 e 2.3.5 e que as medições foram executadas no mesmo ponto, pode ainda recorrer-se à comparação destas FRF's com as apresentadas nas Fig. 2.28 (pág. 48) e Fig. 2.30 (pág. 50). Nestas últimas duas figuras, é possível identificar o segundo modo referido (e ainda outros) embora de forma muito menos pronunciada, a 633 Hz. Pensa-se que se tratam de modos de torção e que são mais evidentes em determinadas curvas apenas por uma questão que tem que ver com a posição do feixe de LASER relativamente ao eixo neutro da estrutura.

2.3.7. ENSAIOS EM TIRANTES

2.3.7.1. TIRANTES ANALISADOS

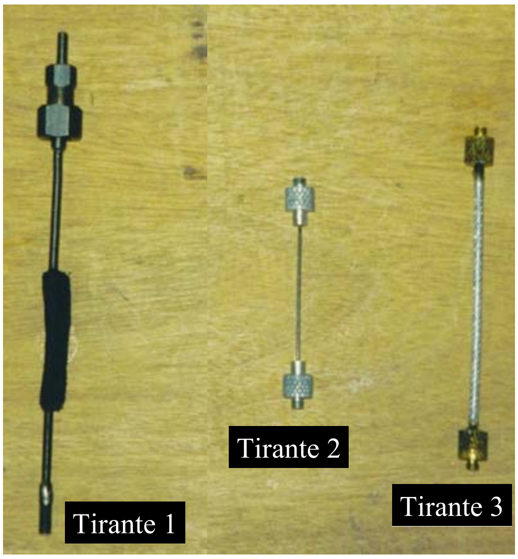


Fig. 2.36 Tipos diferentes de tirantes.

A transmissão da solicitação à estrutura é feita através de um tirante que tem uma das extremidades ligada ao vibrador electromagnético e a outra extremidade ligada ao transdutor de força. Este dispositivo tem como função aplicar a força segundo uma única coordenada sem que sejam impostos outros constrangimentos à estrutura. Foram ensaiados três tirantes, designados por 1, 2 e 3, (Fig. 2.36) em aço comum parcialmente revestido, aço temperado e em ferro galvanizado totalmente revestido, respectivamente. Estes tirantes têm como características principais:

- Tirante 1 - Tirante em aço comum com revestimento parcial em espuma. Este tirante é o mais comprido dos três, tendo alguma rigidez à flexão e à torção.

- Tirante 2 - Tirante delgado em aço temperado. Este é o mais curto dos três tirantes, apresentando baixa rigidez à flexão;

- Tirante 3 - Tirante em cabo de ferro galvanizado revestido em plástico maleável (cabo vulgarmente usado em estendais de roupa). Este tirante é extremamente flexível, com baixa rigidez à flexão e à torção, mas suficientemente rígido para que possa trabalhar à compressão (desde que o seu eixo permaneça rectilíneo). Este tirante é o mais recente dos três, tendo sido concebido e produzido no decorrer deste trabalho.

Os revestimentos dos tirantes 1 e 3 têm como função amortecer eventuais modos próprios que possam ser excitados durante o decorrer de um ensaio.

2.3.7.2. MONTAGEM EXPERIMENTAL E CONDUÇÃO DO ENSAIO

Tal como nos ensaios descritos nas secções 2.3.4, 2.3.5 e 2.3.6 foi utilizada como estrutura de teste uma viga em aço, solicitada com uma força do tipo multiseno numa gama de frequências dos 0 aos 800 Hz. Apresentam-se na Fig. 2.37 fotografias de pormenor das montagens experimentais realizadas.

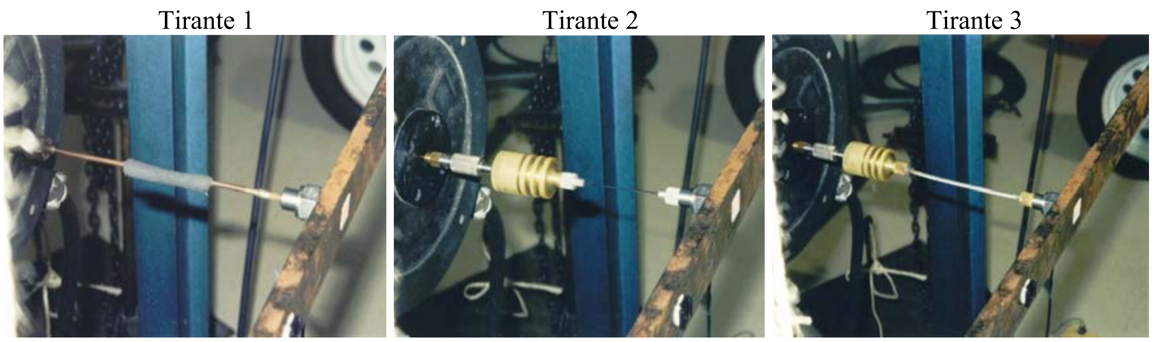


Fig. 2.37 Montagens experimentais referentes aos ensaios dos 3 tirantes.

2.3.7.3. RESULTADOS

As montagens experimentais descritas em 2.3.7.2 conduziram à obtenção de 3 curvas de mobilidade cuja amplitude se representa na Fig. 2.38 e de três curvas de coerência apresentadas na Fig. 2.39.

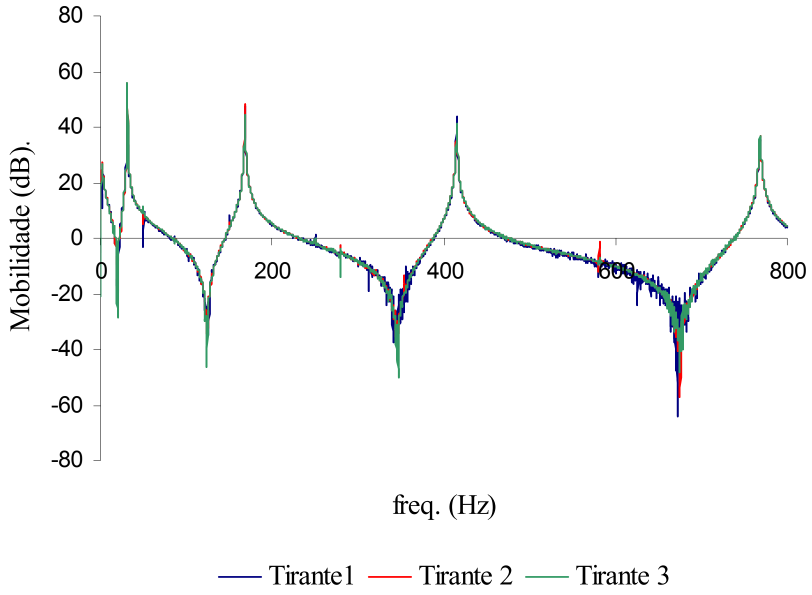


Fig. 2.38 Amplitude das FRF's (Mobilidade) obtidas através do uso de 3 tirantes diferentes.

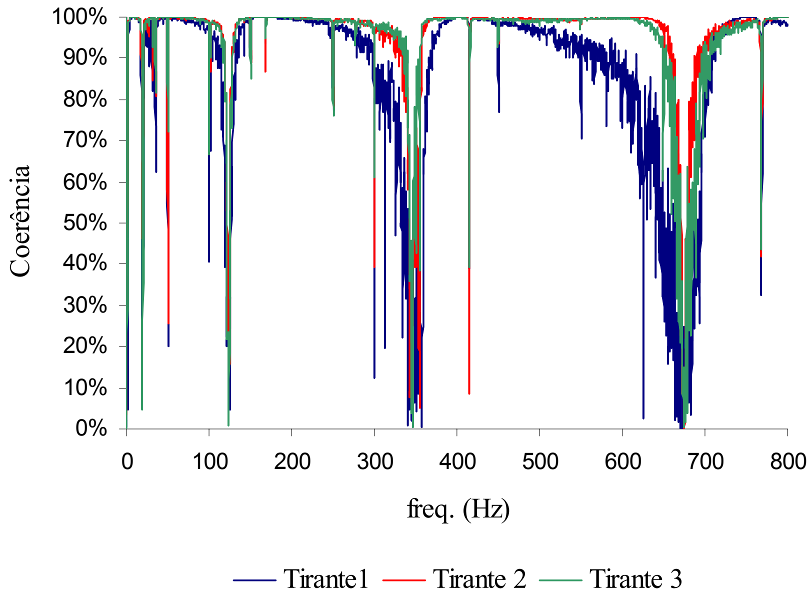


Fig. 2.39 Coerência nos sinais do transdutor LASER para o uso de 3 tirantes diferentes.

As curvas de coerência são, neste caso, o melhor indicador do comportamento dos tirantes e da sua contribuição para os resultados. Como é evidente, o tirante 1 foi o que produziu piores resultados para as mesmas condições experimentais. As médias aritméticas das coerências medidas para os tirantes 1, 2 e 3 foram de, respectivamente, 86.0%, 95.0% e 94.3%.

Qualitativamente, o tirante 1, por ser mais rígido à flexão que os restantes, tem a desvantagem de não cumprir cabalmente a sua função. Ademais, a sua instalação é mais difícil, já que pode provocar maiores constrangimentos se a montagem for efectuada com algum desalinhamento inicial. Os restantes dois tirantes, por serem menos rígidos à flexão, em primeiro lugar, acusam este desalinhamento através de alguma deflexão, sendo por isso mais fácil detectar se estes tirantes estão ou não a colocar constrangimentos ao sistema; em segundo lugar, as suas flexibilidades permitem que os constrangimentos não sejam suficientemente elevados para perturbar o sistema. Por outro lado, o tirante 2 não tem nenhum dispositivo (espuma ou revestimento em plástico) que funcione como absorsor de energia, o que implica que este tirante pode transmitir mais facilmente vibrações residuais e próprias ao sistema devido ao seu baixo amortecimento.

É importante notar que os comentários elaborados no parágrafo anterior não podem ser generalizados a qualquer tipo de situação experimental, já que os tirantes tiveram este tipo de comportamento para uma estrutura simples (viga) e de dimensões relativamente reduzidas. Caso se pretenda aplicar uma solicitação dinâmica numa estrutura de dimensões e massa consideravelmente mais elevadas, por exemplo na caixa de uma carruagem de um comboio, é possível que o tirante 1, de entre os três tirantes referidos, seja o mais adequado a desempenhar a sua função. Uma razão que é razoável apontar é a carga crítica de instabilidade dos tirantes 2 e 3 ser seguramente inferior à do tirante 1.

2.3.8. ANÁLISE DA FASE

Todas as questões abordadas até agora no sinal recolhido pelo transdutor LASER, foram feitas com base na amplitude da FRF e na coerência do sinal. Há no entanto que lembrar que as FRF's são descritas por grandezas complexas, não sendo por isso suficiente limitar o estudo à amplitude (ou módulo). De facto, a realização dos ensaios experimentais, permitiu observar que a fase não estava de acordo com aquilo que seria desejável obter, o que não é de estranhar, atendendo ao que foi dito na secção 2.3.1 a esse respeito (deve-se a um atraso do sinal no circuito proporcional à frequência [46]). No caso de se estar a medir uma acelerância, para um sistema não-amortecido e isento de ruído, a fase deverá tomar os valores de 0º ou de 180º (o que corresponde a um valor real, positivo ou negativo, da acelerância).

Como exemplo ilustrativo do que se observou acontecer repetidamente, apresenta-se nas Fig. 2.40 e na Fig. 2.41, respectivamente, os módulo e fase de uma FRF obtida experimentalmente na extremidade de uma outra viga em aço.

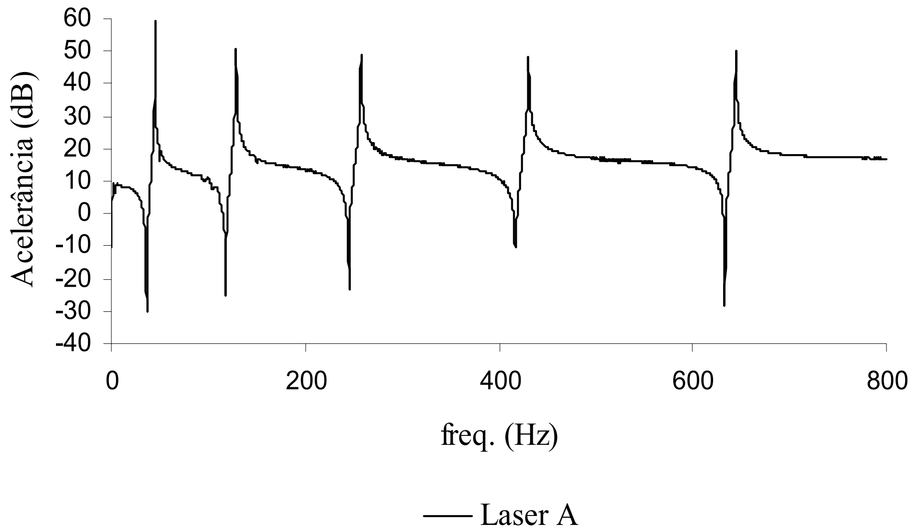


Fig. 2.40 Módulo da FRF obtida através do canal A do transdutor LASER na extremidade de uma viga livre-livre.

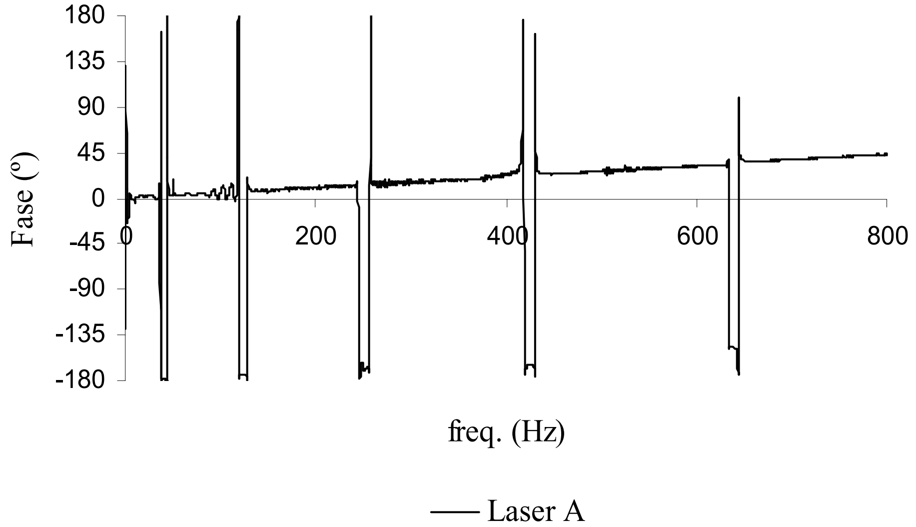


Fig. 2.41 Fase da FRF obtida através do canal A do transdutor LASER na extremidade de uma viga livre-livre.

Nas regiões em que a fase deveria ser nula, há um desvio aparentemente linear ao longo da frequência, tendo sido registado o desvio máximo de 43.1º aos 800Hz. Supõe-se que este fenómeno poderá ter origem num atraso da resposta em relação à força e que esse atraso se deve a características dos equipamentos e/ou aplicações informáticas de processamento de sinal utilizados durante o ensaio [46]. Refira-se no entanto, que a aplicação informática de aquisição e processamento de sinal utilizada (*PULSE Labshop* da B&K) tem uma opção cuja função é contemplar este tipo de atraso nas medições, mas, infelizmente, não se conseguiu eliminar totalmente este efeito, tendo sido apenas possível minimizá-lo ainda que de forma pouco ou nada satisfatória (não houve também a preocupação de fazê-lo, atendendo a que a solução de pós-processamento pareceu ser, como se demonstrará, bastante eficaz).

O método utilizado para corrigir este problema, partiu do princípio de que há uma tendência marcadamente linear de declive positivo nas regiões em que a fase deveria ser nula. Aplicando o método dos mínimos quadrados, foi obtida uma recta de regressão linear da fase nos pontos citados. Condicionando o módulo da FRF a não sofrer alterações, impôs-se declive nulo e intersecção na origem, tendo como resultado haver uma alteração nas partes real e imaginária de cada ponto da FRF. O resultado apresenta-se na Fig. 2.42, no que diz respeito à fase, em que se podem visualizar a cinzento a fase da FRF original (já apresentada na Fig. 2.41), a preto a fase da FRF corrigida e a encarnado a recta de regressão linear utilizada na correcção dos valores.

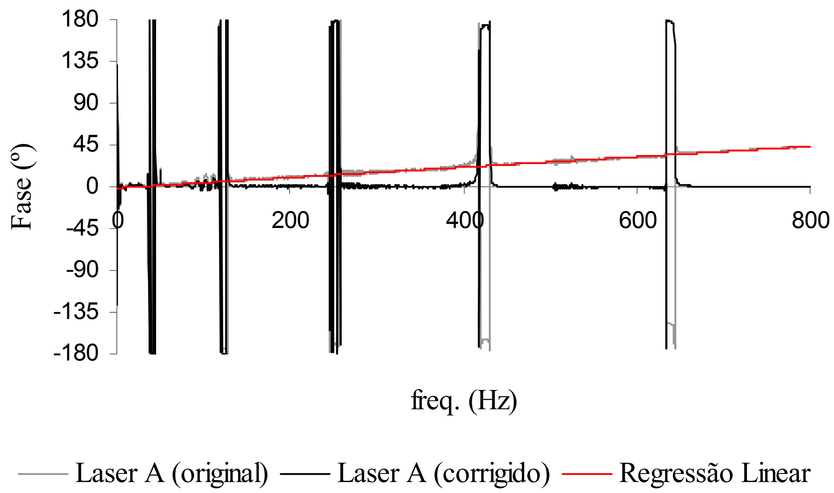


Fig. 2.42 Correcção da fase da FRF obtida através do canal A do transdutor LASER na extremidade de uma viga livre-livre.

2.4. CONCLUSÕES E COMENTÁRIOS FINAIS

Os resultados obtidos após realização dos ensaios descritos e discutidos na secção 2.3, permitem tirar conclusões importantes no que diz respeito às condições experimentais que se pretendem implementar no âmbito dos objectivos deste trabalho. Sumariamente, concluiu-se que:

- Caso se queira obter a representação temporal do sinal através do velocímetro LASER, este deve ser representado na sua forma original, i.e., em termos de velocidade e não em termos de aceleração por derivação do sinal original.

- Os ensaios realizados em 2.3.2 com vista à avaliação do impacto do ruído, permitiram concluir que este não tem relevância nos resultados desde que a ordem de grandeza da resposta seja suficientemente elevada;

- A plataforma sobre a qual se executaram os ensaios no laboratório é suficientemente estável para que não se transmitam vibrações parasitas pelo tripé de suporte ao transdutor LASER. De facto, as medições efectuadas são velocidades relativas e, se não houver garantia de que o transdutor está num referencial fixo, as medições feitas podem facilmente ser falseadas;

- As sensibilidades globais dos pares transdutores de resposta / transdutor de força e a massa activa do transdutor de força para a montagem alternativa apresentada na Fig. 2.7b, têm os valores resumidos no quadro abaixo (retirados da Tabela 2.1):

<table>
<tr><td rowspan="3">Sensibilidades Globais $\left(\frac{V/V}{N/ms^{-2}}\right)$</td><td>Acelerómetro Piezoeléctrico</td><td>1.043</td></tr>
<tr><td>Velocímetro LASER (Canal A)</td><td>1.035</td></tr>
<tr><td>Velocímetro LASER (Canal B)</td><td>1.072</td></tr>
<tr><td colspan="2">Massa activa do Transdutor de Força (g)</td><td>19.7</td></tr>
</table>

Tabela 2.2 Resumo da Tabela 2.1. Sensibilidades globais dos pares transdutor de resposta - transdutor de força e massa activa do transdutor de força.

- O transdutor LASER tem um bom comportamento até pelo menos aos 3200 Hz, estando no entanto a gama de frequências dependente de outras condições experimentais, nomeadamente, características da cola utilizada (no caso, HBM – Schnellklebstoff X60);

- Quando se utiliza o transdutor LASER, deve-se utilizar um ganho minimamente elevado de modo a que a coerência seja unitária em zonas que não compreendam a vizinhança de anti-ressonâncias. Casuisticamente, dever-se-á fazer uma análise nesse sentido;

- A distância a que o LASER está do alvo não tem influência nos resultados, desde que se consiga focar devidamente o feixe de luz;

- Embora as características da fita reflectora permitam que o feixe de LASER não seja perpendicular ao plano em que ela se encontra, é conveniente assegurar essa ortogonalidade por forma a evitar a necessidade de se corrigir os resultados através da expressão (2.16) (pág. 51);

- O tirante 1, para o teste realizado, foi o que conduziu a piores resultados, o que também poderá ter que ver com a estrutura. No caso da viga estudada, ambos aos tirantes 2 e 3 parecem conduzir a resultados satisfatórios, embora o tirante 2 tenha, no ensaio realizado, permitido alcançar uma coerência média global ligeiramente superior (95.0% do tirante 2 contra 94.3% do tirante 3).

- No caso do LASER, é fundamental avaliar a fase do sinal e, caso se verifique que há uma anomalia traduzida por um atraso do sinal da resposta linearmente dependente da frequência, proceder à sua correcção directamente na aplicação de aquisição e processamento de sinal (caso o permita) ou utilizando um qualquer outro método de pós-processamento (v.g., o método descrito na secção 2.3.8 caso esse atraso se manifeste linearmente ao longo da frequência).

Em conclusão, ambos os canais do transdutor LASER proporcionam a aquisição de sinal suficientemente fiável quando contempladas e respeitadas as considerações acima. Tem ainda outras vantagens muito importantes, nomeadamente:

- A sua utilização não implica contacto físico com a estrutura (a menos de um pedaço de fita reflectora), o que permite a obtenção da resposta dinâmica da estrutura sem os problemas associados à fixação dos acelerómetros tradicionais: qualidade da fixação, efeitos relacionados com os cabos de transmissão de dados e efeitos da massa e rigidez dos acelerómetros;

- Permite "varrer" facilmente zonas da estrutura ao longo de uma linha recta ou de linhas circulares, desde que se disponha de mecanismos próprios para deslocação controlada do feixe e de dispositivos de automação e controlo. Isto possibilita calcular as deformadas associadas aos modos e extrair as respostas em mais do que um grau de liberdade num só ensaio;

- A medição de vibrações a altas temperaturas é mais fácil, desde que o elemento reflector esteja concebido para as suportar.

3. DETERMINAÇÃO DE TERMOS ROTACIONAIS DA RESPOSTA DINÂMICA POR TÉCNICAS DE ANÁLISE MODAL

«E pur si muove!»

«E contudo ela move-se!» - célebre frase atribuída a Galileu depois que o Santo Ofício o obrigou a desdizer a sua opinião de que a terra girava sobre si mesma e em torno do Sol.

3.1. FUNÇÃO DE RESPOSTA EM FREQUÊNCIA - GENERALIDADES

3.1.1. INTRODUÇÃO

A propósito das considerações experimentais, foram descritos na secção 2.1, de forma introdutória, três modelos de caracterização de um sistema dinâmico: espacial, modal e de resposta. Interessa conhecer mais detalhadamente o modelo de resposta, em particular a Função de Resposta em Frequência (FRF). Esta pode assumir três formas, de acordo com a descrição cinemática da resposta do sistema ser feita em termos de deslocamento, velocidade ou aceleração, designando-se a FRF, respectivamente, por receptância, mobilidade ou acelerância.

No caso concreto da receptância, chegou-se à expressão (2.7) que relaciona o modelo de resposta com o modelo modal (as inter-relações existentes entre os três modelos foram ilustradas na Fig. 2.1 do mesmo capítulo), e que se repete aqui por uma questão de conveniência:

$$[\alpha(\omega)] = [\Phi]\left[\diagdown\, \omega_r^2(1+\eta_r) - \omega^2 \diagdown\right]^{-1}[\Phi]^T \tag{2.7}$$

A dedução das curvas de mobilidade e acelerância é trivial e obtém-se a partir da receptância tal como demonstrado em [4].

Nesta equação, cada termo da matriz de receptância pode ser escrito como:

$$\alpha_{jk}(\omega)=\frac{\overline{X}_j}{F_k}=\sum_{r=1}^{N}\frac{{}_r\overline{A}_{jk}}{\omega_r^2-\omega^2+i\eta_r\omega_r^2} \tag{3.1}$$

em que $\overline{X}_j$ é a amplitude complexa[21] da resposta na coordenada j, F é a amplitude da força na coordenada k, N é o número total de modos, r é o modo de vibração, ω_r e η_r são, respectivamente, as frequência natural e amortecimento histerético para o modo r, e ${}_r\overline{A}_{jk}$ é uma quantidade complexa conhecida como Constante Modal e que se pode escrever como:

$${}_r\overline{A}_{jk}={}_rA_{jk}e^{i\,{}_r\varphi_{jk}}=\phi_{jr}\phi_{kr} \tag{3.2}$$

em que ϕ_{jr} e ϕ_{kr} são os elementos j e k, respectivamente, do vector modal $\{\phi_r\}$ (vector modal $\{\psi_r\}$ normalizado à massa modal m_r) e ${}_rA_{jk}$ e ${}_r\varphi_{jk}$ são, respectivamente, os módulo e fase da constante modal dados por:

$${}_rA_{jk}=\left|\phi_{jr}\phi_{kr}\right| \tag{3.3}$$

e

$${}_r\varphi_{jk}=arg\left(\phi_{jr}\phi_{kr}\right) \tag{3.4}$$

Podem desde já tirar-se duas conclusões. Em primeiro lugar, a constante modal obtida por (3.2) mostra que a matriz de receptância é simétrica, e portanto:

$$\alpha_{jk}(\omega)=\frac{\overline{X}_j}{F_k}=\alpha_{kj}(\omega)=\frac{\overline{X}_k}{F_j} \tag{3.5}$$

sendo esta relação conhecida como Princípio da Reciprocidade. Em segundo lugar, as constantes modais estão interrelacionadas, obedecendo a uma relação que é descrita pelo par de equações que constitui as conhecidas Equações de Consistência das Constantes Modais:

---

[21] A amplitude complexa (da resposta) é também conhecida como *phasor* [4] por incluir o ângulo de fase φ do movimento da resposta em relação à força: $\overline{X}=Xe^{i\varphi}$.

$$
\begin{aligned}
{}_r\overline{A}_{jk} &= \phi_{jr}\phi_{kr} \\
{}_r\overline{A}_{jj} &= \phi_{jr}^2 \quad \vee \quad {}_r\overline{A}_{kk} = \phi_{kr}^2
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

Um resultado importante que se retira de (3.5) e (3.6) é que, conhecendo-se apenas uma linha completa (ou coluna) da matriz $[\alpha(\omega)]$, então é possível derivar-se a matriz completa de receptância $[\alpha(\omega)]$.

Atendendo à expressão (3.1) e a todas as outras considerações tomadas, é possível traçar-se FRF's, cujas características gráficas peculiares são destacadas pela presença de máximos (ressonâncias) e mínimos (anti-ressonâncias), cujo aparecimento será discutido na secção seguinte.

3.1.2. RESSONÂNCIAS E ANTI-RESSONÂNCIAS

Por definição [51], para sistemas não-amortecidos, a frequência de ressonância de uma determinada FRF, considerando que se trata de uma receptância α_{jk}, é a frequência da vibração à qual a amplitude do deslocamento da coordenada *j* aumenta progressivamente para infinito quando aplicada uma força na coordenada *k* que tende para zero, i.e.:

$$\omega_r = \omega(x_j \to \infty, f_k \to 0); \quad f_m = 0, m \neq k \tag{3.7}$$

Pelo contrário, à frequência de uma anti-ressonância de α_{jk}, a amplitude do deslocamento na coordenada *j* é infinitesimal, mesmo que a força aplicada na coordenada *k* seja muito elevada, i.e.:

$$\mu_{jk,a} = \omega(x_j \to 0, f_k \to \infty); \quad f_m = 0, m \neq k \tag{3.8}$$

em que $\mu_{jk,a}$ representa a frequência da anti-ressonância *a*[22].

Recorde-se o modelo espacial de caracterização dinâmica de uma estrutura, assumindo amortecimento histerético, apresentado no capítulo 2:

$$[M]\{\ddot{x}\} + (i[D] + [K])\{x\} = \{f\} \tag{2.2}$$

Esta expressão pode ser rescrita na forma:

[22] Por uma questão de simplicidade, utilizar-se-á doravante a notação μ_{jk} para representar $\mu_{jk,a}$.

$$[Z]\{x\}=\{f\} \tag{3.9}$$

em que:

$$[Z(\omega)]=[\alpha(\omega)]^{-1}=[[K]-\omega^2[M]+i[D]] \tag{3.10}$$

é a matriz de rigidez dinâmica. As ressonâncias da receptância correspondem aos valores próprios de (3.9).

De (3.7) é evidente que para determinar as ressonâncias de α_{jk}, tem que se fazer $f_k=0$ em (3.9). No entanto, a força é nula em todas as outras coordenadas $(f_m=0; m\neq k)$, pelo que a condição imposta para se determinar a ressonância de α_{jk} é que o vector de forças $\{f\}$ seja nulo. Este requisito é o mesmo para todas as funções de transferência, o que faz da ressonância uma característica global de um sistema. Por outras palavras, a frequência de ressonância de um sistema é independente das coordenadas de medição da resposta e de aplicação da força.

Do mesmo modo, de (3.8) é evidente que para determinar as anti-ressonâncias de α_{jk}, tem que se fazer $x_j=0$ em (3.9), o que é equivalente a eliminar a coluna *j* nessa equação. Por outro lado, para satisfazer que $f_k\rightarrow\infty$ com $f_m=0$ $(m\neq k)$, é necessário eliminar a linha *k* dessa equação, já que:

$$\frac{Z_{jk}}{f_k}\rightarrow 0;\;\; f_k\rightarrow\infty;\;\; f_m=0, m\neq k \tag{3.11}$$

Assim, para se determinar as frequências das anti-ressonâncias de α_{jk}, é preciso, em primeiro lugar, reduzir a matriz de rigidez dinâmica de ordem *N* a ordem *N*-1, e impor $\{f\}$ vector nulo. Matematicamente, isto é equivalente a resolver um problema de valores próprios reduzido, em que se eliminaram as coluna *j* e linha *k* da matriz de rigidez dinâmica $[Z]$. Os valores próprios da matriz reduzida de dimensão *N*-1 são as anti-ressonâncias μ_{jk} de α_{jk}. Então, é evidente que as frequências das anti-ressonâncias não são características globais mas características locais da estrutura, i.e., os valores de μ_{jk} dependem da localização relativa de *j* e *k* nas coordenadas espaciais.

De uma forma geral, o número máximo de anti-ressonâncias que uma receptância α_{jk} pode ter é dado por [51]:

$$n = (N-1) - |j-k| \tag{3.12}$$

em que N, por ser o número de graus de liberdade do sistema, é também o número total de ressonâncias[23]. No caso de uma receptância directa[24] $(j \equiv k)$, há exactamente N-1 anti-ressonâncias, cada uma das quais intercalada com uma ressonância no espectro completo do sistema [51].

O atrás exposto sugere que qualquer modificação estrutural que ocorra apenas numa das coordenadas j ou k não altera as anti-ressonâncias da receptância α_{jk}. Fisicamente, uma vez que a anti-ressonância implica que a estrutura esteja "fixa" na coordenada j a essa frequência, então parece lógico que quaisquer modificações estruturais nessa coordenada não terão impacto na resposta do sistema a essa frequência. No desenvolvimento subsequente, será possível, em altura oportuna, demonstrar este facto, pelo menos do ponto de vista teórico.

Um outro resultado interessante desta análise é que, considerando FRF's directas, cada anti-ressonância tem como significado físico ser uma ressonância do mesmo sistema se a coordenada em consideração for fixa. Esta propriedade é útil em alguns casos experimentais, tais como em mesas sísmicas, em que a excitação e a resposta são medidas na mesa sísmica. As anti-ressonâncias deste sistema (mesa+estrutura) correspondem às frequências de ressonância da estrutura em análise (assumindo que a mesa sísmica se comporta como um corpo rígido, o que é em geral verdade atendendo a que, normalmente, a gama de frequências de interesse é baixa) [4].

Finalmente, resta compreender o "mecanismo" de formação de uma anti-ressonância. Por uma questão de simplicidade, considere-se um receptância directa, de um sistema qualquer

---

[23] Esta afirmação só é válida considerando que as coordenadas j e k não coincidem com nodos de vibração.

[24] Chamam-se FRF's directas as que relacionam solicitações e respostas nas mesmas coordenadas; por oposição, chamam-se FRF's transferidas as que relacionam solicitações e respostas em coordenadas diferentes.

de 2 graus de liberdade sem amortecimento. De acordo com (3.1), esta FRF pode ser escrita como:

$$\alpha_{11} = \frac{{}_1\overline{A}_{11}}{\omega_1^2 - \omega^2} + \frac{{}_2\overline{A}_{11}}{\omega_2^2 - \omega^2} \tag{3.13}$$

Entre as duas ressonâncias ω_1 e ω_2 existe, no caso geral, ou uma anti-ressonância, no caso de ambas as constantes modais ${}_1\overline{A}_{11}$ e ${}_2\overline{A}_{11}$ terem o mesmo sinal, ou um mínimo, no caso das constantes modais terem sinais opostos (para baixo amortecimento). Como se trata de uma receptância directa, sabe-se que ambas as constantes modais ${}_1\overline{A}_{11}$ e ${}_2\overline{A}_{11}$ são positivas, uma vez que, de (3.6), se tem ${}_1\overline{A}_{11} = \phi_{11}^2$ e ${}_2\overline{A}_{11} = \phi_{12}^2$. Para uma frequência situada entre ω_1 e ω_2 o primeiro termo de (3.13) é negativo enquanto que o segundo termo é positivo, pelo que existirá uma frequência entre ω_1 e ω_2 para a qual os dois termos se anulam. Esta situação é ilustrada na Fig. 3.1.

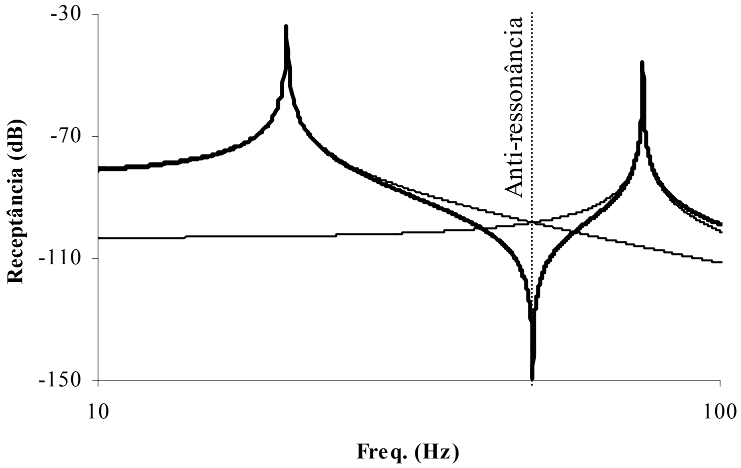


Fig. 3.1 Anti-ressonância de uma receptância de um sistema com 2 graus de liberdade.

3.1.3. RESIDUAIS

Um dos parâmetros que é necessário definir na experimentação em análise modal, é a gama de frequências, que está inevitavelmente limitada, seja por questões relacionadas com o equipamento de aquisição de sinal seja por questões meramente práticas, pelo menos no que diz respeito a altas frequências. Isto significa que não é possível identificar as propriedades de modos que se encontrem fora da gama de frequências em análise. No entanto, a influência destes modos está presente de forma importante e muito significativa na FRF adquirida experimentalmente, pelo que tem que ser tida em consideração a influência destes modos.

Na regeneração de uma FRF a partir dos parâmetros modais obtidos, v.g., através da Identificação Modal[25] da FRF medida experimentalmente, deve-se usar uma expressão do tipo:

$$\alpha_{jk}(\omega)=\sum_{r=m_1}^{m_2}\frac{{}_r\overline{A}_{jk}}{\omega_r^2-\omega^2+i\eta_r\omega_r^2} \tag{3.14}$$

em que se limitou o número de ressonâncias entre m_1 e m_2 para ilustrar que, de uma forma geral, nem sempre se inicia a análise experimental abaixo do primeiro modo (r=1) e nunca se consegue atingir o modo mais alto (r=N)[26]. Contudo, o facto de se limitar a aquisição de dados experimental a uma gama de frequências que compreenda as ressonâncias m_1 a m_2, não significa que a FRF não seja afectada pelos modos vizinhos que estão fora do alcance deste intervalo. Atendendo a que a equação (3.1) é a que melhor descreveria o modelo completo, pode-se, sem perda de generalidade, rescrevê-la como:

$$\alpha_{jk}(\omega)=\sum_{r=1}^{m_1-1}\frac{{}_r\overline{A}_{jk}}{\omega_r^2-\omega^2+i\eta_r\omega_r^2}+\sum_{r=m_1}^{m_2}\frac{{}_r\overline{A}_{jk}}{\omega_r^2-\omega^2+i\eta_r\omega_r^2}+\sum_{r=m_2+1}^{N}\frac{{}_r\overline{A}_{jk}}{\omega_r^2-\omega^2+i\eta_r\omega_r^2} \tag{3.15}$$

Nesta equação, o primeiro termo refere-se aos modos de "baixa frequência", o terceiro termo refere-se aos modos de "alta frequência" e o segundo termo refere-se aos modos efectivamente identificados dentro da gama de análise (único termo a aparecer em (3.14)). A Fig. 3.2 representa curvas típicas para cada um dos termos citados, em que o do meio (modos de "frequência média") corresponde àquele que teria sido extraído durante o processo de análise modal.

[25] Será abordada uma técnica de Identificação Modal na secção seguinte (3.1.4).

[26] $N=\infty$ em sistemas reais.

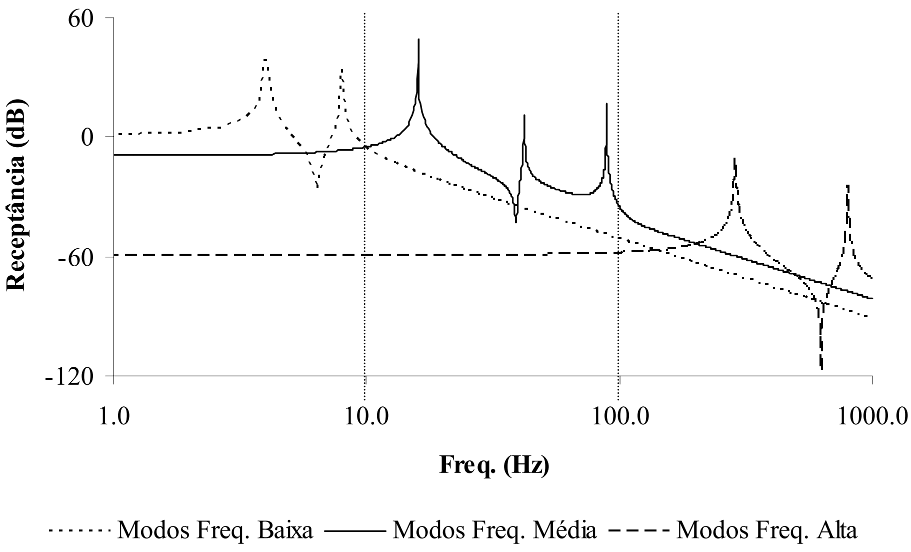


Fig. 3.2 Simulação numérica da contribuição de modos de "baixa", "média" e "alta frequência".

É possível observar que, dentro da gama de frequências de interesse, o primeiro termo, de "baixa frequência", tende a ter uma contribuição aproximadamente mássica enquanto que o terceiro termo, de "alta frequência", tende a ter uma contribuição aproximadamente rígida. Tem-se então uma base para rescrever a equação (3.15) introduzindo os chamados termos Residuais que vêm substituir os termos de "baixa" e de "alta frequência" [52]:

$$\alpha_{jk}(\omega) \cong -\frac{1}{\omega^2 \cdot M_{jk}^R} + \sum_{r=m_1}^{m_2} \left(\frac{{}_r\overline{A}_{jk}}{\omega_r^2 - \omega^2 + i\eta_r \omega_r^2} \right) + \frac{1}{K_{jk}^R} \tag{3.16}$$

em que M_{jk}^R e K_{jk}^R são, respectivamente, os residuais mássico e rígido para esta FRF em particular.

Por vezes, é conveniente tratar os termos residuais como se fossem modos, i.e., em vez de se representar o efeito de cada residual por uma constante, cada um destes pode ser representado por um "pseudo modo", que é o mesmo que dizer que cada termo residual tem uma massa e rigidez. Para traduzir os efeitos dos termos de "baixa frequência", existirá um "pseudo-modo" com uma frequência natural abaixo do limite inferior do intervalo de frequências analisado; para traduzir os efeitos dos termos de "alta frequência", existirá um "pseudo-modo" com uma frequência natural acima do limite superior do intervalo de frequências. Com efeito, isto é o mesmo que dizer que as contribuições dos residuais mássico e rígido não são descritas apenas por linhas de massa e rigidez, mas que ambas têm uma curva característica típica de um sistema de 1 grau de liberdade longe da sua frequência natural.

Para terminar, é importante sublinhar que os termos residuais ou os “pseudo-modos” são exclusivos de uma determinada FRF, i.e.:

- Os termos residuais mássico e rígido encontrados para um dado caso só são válidos para essa FRF em particular e nesse intervalo de frequências específico. Caso a análise passe a ser feita num intervalo diferente, mesmo que se trate da mesma FRF do sistema, os termos residuais terão que ser calculados novamente. Também não é possível relacionar os termos residuais das várias FRF’s de um sistema [53];

- Os “pseudo modos” não são modos genuínos e, embora representem a contribuição de modos fora do intervalo de frequências analisado, não podem ser utilizados para deduzir a contribuição correspondente numa qualquer outra FRF;

3.1.4. IDENTIFICAÇÃO MODAL - A FRC

As expressões (3.1) e (3.16) mostram que, pelo menos para modos não demasiado próximos em termos de frequências naturais e com valores das constantes modais da mesma ordem de grandeza, a contribuição de cada modo na vizinhança da respectiva frequência natural é mais importante que a contribuição total de todos os outros modos. Nesta vizinhança, o respectivo modo pode dizer-se dominante.

Então, considerando que a contribuição de todos os outros modos da estrutura, na vizinhança de cada modo *r*, pode ser aproximada por uma constante, a função receptância, na mesma vizinhança do modo em causa, pode ser aproximada por:

$$ {}_r\alpha_{jk}(\omega) = \frac{{}_r\overline{A}_{jk}}{\omega_r^2 - \omega^2 + i\eta_r\omega_r^2} + constante \tag{3.17} $$

em que a constante que surge nesta expressão é a contribuição de um termo residual cujo papel é equivalente ao descrito em 3.1.3, já que traduz a diferença entre o valor da receptância para determinada frequência e a contribuição para o mesmo modo dominante (note-se que, no caso de modos muito próximos, a contribuição dos modos vizinhos poderia ser melhor aproximada por um termo dependente da frequência).

Após alguma manipulação matemática, Ribeiro [11] definiu uma função a que chamou Função de Resposta Característica (FRC):

$$\beta(\omega^2) = \frac{1}{\omega_r^2 - \omega^2 + i\eta_r\omega_r^2} \tag{3.18}$$

que se observa ser semelhante à de um termo modal da receptância (na vizinhança de cada frequência de ressonância ω_r) com constante modal unitária e que depende apenas dos parâmetros globais, característicos da estrutura, e não dos locais – constantes modais complexas – que dependem das coordenadas escolhidas para a realização dos ensaios.

A FRC apresenta a forma da receptância de um sistema com um grau de liberdade (na vizinhança de cada frequência de ressonância ω_r). Uma vez que o numerador é unitário, pode ser aplicado com simplicidade um método de identificação conhecido como método da inversa. Com efeito, calculando:

$$\frac{1}{\beta(\omega^2)} = \omega_r^2 - \omega^2 + i\eta_r\omega_r^2 \tag{3.19}$$

facilmente se observa que a parte real é uma recta em ω^2 com declive unitário negativo e a parte imaginária é uma constante que depende do valor do factor de amortecimento e da frequência natural:

$$Real\left(\frac{1}{\beta(\omega^2)}\right) = \omega_r^2 - \omega^2 \tag{3.20}$$

$$Imag\left(\frac{1}{\beta(\omega^2)}\right) = \eta_r\omega_r^2 \tag{3.21}$$

Notando que:

$$\frac{\partial}{\partial\omega^2}\left[Real\left(\frac{1}{\beta(\omega^2)}\right)\right] = -1 \tag{3.22}$$

$$\frac{\partial}{\partial\omega^2}\left[Imag\left(\frac{1}{\beta(\omega^2)}\right)\right] = 0 \tag{3.23}$$

então, na vizinhança de cada modo, esta representação gráfica deve permitir calcular facilmente a frequência de ressonância e o factor de amortecimento histerético do modo em causa. Note-se que a existência destes troços de recta permite também evidenciar a existência dos modos, já que, fora da vizinhança das ressonâncias a FRC não tem validade, e portanto, tais troços não existirão.

Quanto às constantes modais complexas, estas são um resultado obtido [11] através de manipulação matemática mais complexa partindo da expressão (3.17):

$$ {}_r\overline{A}_{jk} = \frac{\left[{}_r\alpha_{jk}(\omega_1) - {}_r\alpha_{jk}(\omega_2)\right]\cdot\left(\omega_r^2 - \omega_1^2 + i\eta_r\omega_r^2\right)\cdot\left(\omega_r^2 - \omega_2^2 + i\eta_r\omega_r^2\right)}{\omega_1^2 - \omega_2^2} \tag{3.24} $$

em que ω_1 e ω_2 são duas frequências próximas. Como os parâmetros globais já foram calculados, para cada par de pontos $\{\omega_1, {}_r\alpha_{jk}(\omega_1)\}$ e $\{\omega_2, {}_r\alpha_{jk}(\omega_2)\}$, pode obter-se o valor complexo da constante modal do modo *r*; na vizinhança de cada modo, todos os pares de pontos deverão conduzir ao mesmo resultado, pelo que a média entre os vários valores assim obtidos deverá dar uma estimativa razoável do valor pretendido. No entanto, estas estimativas das constantes modais nem sempre serão necessariamente consistentes. Para obter um modelo completo consistente da estrutura, torna-se necessário corrigir os valores obtidos, de acordo com o procedimento exposto por Ribeiro em [11].

3.2. ACOPLAMENTO DINÂMICO DE ESTRUTURAS

3.2.1. INTRODUÇÃO

As técnicas de acoplamento de estruturas começaram a ser exploradas com maior profundidade aquando da generalização do método dos elementos finitos (MEF). O princípio básico inerente ao MEF consiste em considerar que um sistema complexo contínuo pode ser discretizado em elementos analíticos individuais simples tais como vigas, placas ou cascas que, numa fase final, podem ser combinados num único modelo ou sistema completo [4]. Ao mesmo tempo, a complexidade das estruturas deu origem ao desenvolvimento de filosofias de cálculo em que uma estrutura pode ser encarada como sendo constituída por um conjunto de subestruturas, cada uma das quais pode ser analisada separadamente, procedendo-se posteriormente ao seu acoplamento [3].

Como se verá no desenvolvimento subsequente, o estudo dos algoritmos matemáticos de acoplamento pode conduzir ao enunciado de processos de desacoplamento. O desacoplamento, definido como o processo inverso do acoplamento, consiste em prever - ou modelar - o comportamento da estrutura remanescente quando se retira uma determinada parte ou subestrutura.

Uma das vantagens que o estudo de uma estrutura por acoplamento de subestruturas tem é a de permitir que o modelo de cada subestrutura seja obtido pelo processo mais adequado a cada caso. Assim, por exemplo, determinados componentes podem ser estudados experimentalmente enquanto outros podem ser modelados a partir de técnicas analíticas e/ou numéricas. A descrição dinâmica obtida para cada subestrutura pode ser feita recorrendo a qualquer um dos modelos espacial, modal ou de resposta já descritos na secção 2.1, mas é geralmente possível reduzir qualquer delas a uma descrição comum adequada à técnica de acoplamento escolhida [11].

3.2.2. ACOPLAMENTO DE IMPEDÂNCIAS

Existem várias técnicas de acoplamento na literatura, podendo encontrar-se em [4] e [11] uma pesquisa interessante acerca de alguns dos trabalhos mais relevantes publicados nesta área. Neste trabalho, o processo de acoplamento será baseado no conhecimento das matrizes de resposta em frequência, atendendo a que a descrição dinâmica da estrutura em estudo é obtida por via experimental. Pelo facto de utilizar as matrizes inversas da receptância, também conhecidas por matrizes de rigidez dinâmica, o processo a seguir apresentado é designado por Acoplamento de Impedâncias[27].

Sem perda de generalidade, este método pode ser exemplificado pelo estudo de duas subestruturas, aqui designadas por *A* e *B*, ligadas por um determinado número de

[27] As funções inversas da Receptância, Mobilidade e Acelerância são designadas de, respectivamente, Rigidez Dinâmica, Impedância Mecânica e Massa Aparente. Contudo, é importante notar que a designação de Mobilidade é usualmente aceite como sendo válida para qualquer uma das relações entre movimento e força, pelo que, de modo similar, a Impedância Mecânica pode ser usada para descrever qualquer uma das relações inversas. Por estes motivos se justifica designar Acoplamento de Impedâncias ao procedimento de acoplamento que se irá descrever em vez de *Acoplamento de Rigidez*, que seria, pelas razões apontadas, o termo aparentemente sugerido para designar este procedimento.

coordenadas generalizadas x, segundo as quais se transmitem forças generalizadas f (Fig. 3.3).

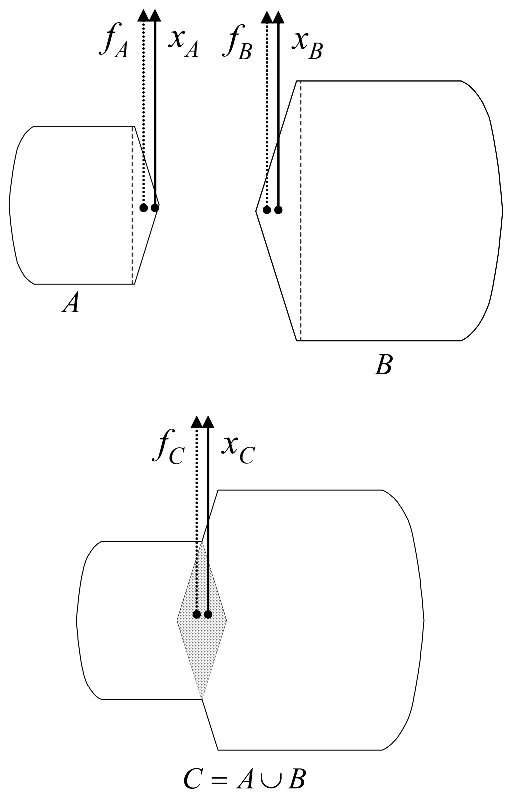


Fig. 3.3 Acoplamento das subestruturas A e B numa estrutura C.

As condições de equilíbrio e de compatibilidade de deslocamentos implicam que:

$$\begin{aligned} f_A + f_B &= f_C \\ x_A = x_B &= x_C \end{aligned} \tag{3.25}$$

Cada subestrutura terá coordenadas de interesse, quer nas ligações, quer fora delas, donde o mesmo acontecerá à estrutura resultante, já que esta terá todas as coordenadas das duas subestruturas.

Podem então representar-se de forma abstracta os domínios das subestruturas A e B, acopladas por um determinado conjunto finito de coordenadas de forma a constituírem a estrutura C. Designando o conjunto das coordenadas exclusivas de A por i, o das comuns a A e a B por j e o das exclusivas de B por k, os respectivos domínios podem ser representados como apresentado na Fig. 3.4.

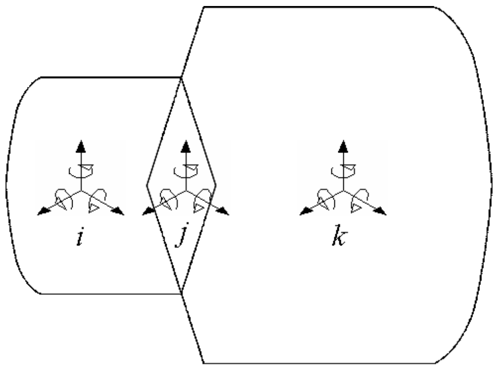


Fig. 3.4 Coordenadas comuns e não comuns de subestruturas acopladas.

Então, as matrizes de receptância $[\alpha]$, que relacionam as forças dinâmicas aplicadas à estrutura com os deslocamentos que provocam, são definidas de forma a que:

$$\{x\} = [\alpha] \cdot \{f\} \tag{3.26}$$

em que $\{x\}$ é o vector de deslocamentos e $\{f\}$ é o vector de forças.

A matriz $[\alpha]$ pode ser repartida em submatrizes, de acordo com o conjunto de coordenadas:

$\left[\alpha_{ii}^{(A)}\right]$ - matriz de receptância entre as coordenadas *i* da subestrutura *A*;

$\left[\alpha_{ij}^{(A)}\right]$ - matriz de receptância entre as coordenadas *i* e *j* da subestrutura *A*;

$\left[\alpha_{jj}^{(A)}\right]$ - matriz de receptância entre as coordenadas *j* da subestrutura *A*;

$\left[\alpha_{jj}^{(B)}\right]$ - matriz de receptância entre as coordenadas *j* da subestrutura *B*;

$\left[\alpha_{jk}^{(B)}\right]$ - matriz de receptância entre as coordenadas *j* e *k* da subestrutura *B*;

$\left[\alpha_{kk}^{(B)}\right]$ - matriz de receptância entre as coordenadas *k* da subestrutura *B*;

$\left[\alpha^{(A)}\right]$ - matriz de receptância global da subestrutura *A*;

$\left[\alpha^{(B)}\right]$ - matriz de receptância global da subestrutura *B*;

$\left[\alpha^{(C)}\right]$ - matriz de receptância global da estrutura *C*;

pelo que as receptâncias das duas subestruturas e da estrutura completa serão:

$$\left[\alpha^{(A)}\right]=\begin{bmatrix}\alpha_{ii}^{(A)} & \alpha_{ij}^{(A)}\\ \alpha_{ji}^{(A)} & \alpha_{jj}^{(A)}\end{bmatrix}$$

$$\left[\alpha^{(B)}\right]=\begin{bmatrix}\alpha_{jj}^{(B)} & \alpha_{jk}^{(B)}\\ \alpha_{kj}^{(B)} & \alpha_{kk}^{(B)}\end{bmatrix} \tag{3.27}$$

$$\left[\alpha^{(C)}\right]=\begin{bmatrix}\alpha_{ii}^{(C)} & \alpha_{ij}^{(C)} & \alpha_{ik}^{(C)}\\ \alpha_{ji}^{(C)} & \alpha_{jj}^{(C)} & \alpha_{jk}^{(C)}\\ \alpha_{ki}^{(C)} & \alpha_{kj}^{(C)} & \alpha_{kk}^{(C)}\end{bmatrix}$$

As condições de equilíbrio e de compatibilidade de deslocamentos devem ser verificadas em todas as coordenadas comuns (coordenadas de ligação ou de acoplamento *j*), pelo que as expressões (3.25) podem ser reformuladas na forma vectorial como:

$$\left\{x_j^{(C)}\right\}=\left\{x_j^{(A)}\right\}=\left\{x_j^{(B)}\right\}$$

$$\left\{f_j^{(C)}\right\}=\left\{f_j^{(A)}\right\}+\left\{f_j^{(B)}\right\} \tag{3.28}$$

Daqui se conclui [4][11][39] que a matriz de receptância da estrutura completa se pode relacionar com as das subestruturas pela expressão[28]:

$$\left[\alpha^{(C)}\right]=\left[\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}\left[\alpha_{ii}^{(A)}\right] & \left[\alpha_{ij}^{(A)}\right]\\ \left[\alpha_{ji}^{(A)}\right] & \left[\alpha_{jj}^{(A)}\right]\end{bmatrix}^{-1} & [0]\\ & [0]\\ [0]\quad [0] & [0]\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}[0] & [0]\quad [0]\\ [0] & \begin{bmatrix}\left[\alpha_{jj}^{(B)}\right] & \left[\alpha_{jk}^{(B)}\right]\\ \left[\alpha_{kj}^{(B)}\right] & \left[\alpha_{kk}^{(B)}\right]\end{bmatrix}^{-1}\\ [0] & \end{bmatrix}\right]^{-1} \tag{3.29}$$

[28] Na dedução desta expressão são utilizadas as inversas das matrizes de receptância (também designadas genericamente por matrizes de mobilidade) $\left[\alpha^{(A)}\right]$ e $\left[\alpha^{(B)}\right]$ dadas por (3.27), $\left[Z^{(A)}\right]=\left[\alpha^{(A)}\right]^{-1}$ e $\left[Z^{(B)}\right]=\left[\alpha^{(B)}\right]^{-1}$ respectivamente, denominadas matrizes de rigidez dinâmica (também designadas genericamente por impedância mecânica), sendo por esta facto que se atribui a esta técnica o nome de Acoplamento de Impedâncias, tal como já referido anteriormente. No entanto, é importante notar que, a mesma formulação pode ser adaptada a outras formas das funções de transferência, atendendo às relações existentes entre receptância, mobilidade e acelerância [4].

A expressão (3.29) pode ainda ser representada na forma condensada através da utilização do "operador de acoplamento $\oplus$":

$$\left[\alpha^{(C)}\right]=\left(\left[\alpha^{(A)}\right]^{-1}\oplus\left[\alpha^{(B)}\right]^{-1}\right)^{-1} \tag{3.30}$$

ou mais simplesmente:

$$C = A \oplus B \tag{3.31}$$

Esta última expressão, escrita sob a forma de (3.29), (3.30) ou (3.31), poder-se-á dizer correspondente à formulação clássica do problema do acoplamento de subestruturas, exigindo três inversões de matrizes, cujas ordens são iguais ao número de coordenadas de cada subestrutura e da estrutura completa. O processo de inversão de matrizes de dimensões apreciáveis pode, frequentemente, ser numericamente instável, dependendo dos valores particulares que os termos das matrizes tomam. Por outro lado, o número de operações que envolve uma inversão pode ser extremamente elevado ainda que para uma ordem relativamente modesta das matrizes o que, aliado ao facto de que a expressão deverá ser aplicada frequência a frequência, pode tornar o processo muito pesado em termos computacionais. Por outro lado, para frequências próximas das de ressonância, estas matrizes são mal condicionadas, quase singulares. Assim, em termos de cálculo, além de ser uma formulação eventualmente muito pesada, pode facilmente dar origem a instabilidade numérica, tornando problemática a sua utilização generalizada [11].

Existem, no entanto, algumas formas alternativas que permitem evitar os inconvenientes desta formulação. Henderson e Searle [54] chegaram a uma formulação que requer apenas uma inversão de matrizes (a da matriz $\left[H_{jj}\right]$, de ordem igual ao número de coordenadas comuns às subestruturas):

$$\left[H^{(C)}\right]=$$
$$\begin{bmatrix} \left[H_{ii}^{(A)}\right]-\left[H_{ij}^{(A)}\right]\left[H_{jj}\right]^{-1}\left[H_{ji}^{(A)}\right] & \left[H_{ij}^{(A)}\right]-\left[\left[H_{ij}^{(A)}\right]\right]\left[H_{jj}\right]^{-1}\left[H_{jj}^{(A)}\right] & \left[H_{ij}^{(A)}\right]\left[H_{jj}\right]^{-1}\left[H_{jk}^{(B)}\right] \\ \left[H_{jj}^{(B)}\right]\left[H_{jj}\right]^{-1}\left[H_{ji}^{(A)}\right] & \left[H_{jj}^{(B)}\right]\left[H_{jj}\right]^{-1}\left[H_{jj}^{(A)}\right] & \left[H_{jk}^{(B)}\right]-\left[H_{jj}^{(B)}\right]\left[H_{jj}\right]^{-1}\left[H_{jk}^{(B)}\right] \\ \left[H_{kj}^{(B)}\right]\left[H_{jj}\right]^{-1}\left[H_{ji}^{(A)}\right] & \left[H_{kj}^{(B)}\right]\left[H_{jj}\right]^{-1}\left[H_{jj}^{(A)}\right] & \left[H_{kk}^{(B)}\right]-\left[H_{kj}^{(B)}\right]\left[H_{jj}\right]^{-1}\left[H_{jk}^{(B)}\right] \end{bmatrix}$$

(3.32)

em que:

$$\left[H_{jj}\right]=\left[H_{jj}^{(A)}\right]+\left[H_{jj}^{(B)}\right] \tag{3.33}$$

Skingle [55], utilizando alguma manipulação matemática, chegou a:

$$\left[H^{(C)}\right]= \\ \begin{bmatrix} \left[H_{ii}^{(A)}\right] & \left[H_{ij}^{(A)}\right] & [0] \\ \left[H_{ji}^{(A)}\right] & \left[H_{jj}^{(A)}\right] & [0] \\ [0] & [0] & \left[H_{kk}^{(B)}\right] \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \left[H_{ij}^{(A)}\right] \\ \left[H_{jj}^{(A)}\right] \\ -\left[H_{kj}^{(B)}\right] \end{bmatrix} \cdot \left(\left[H_{jj}^{(A)}\right]+\left[H_{jj}^{(B)}\right]\right)^{-1} \cdot \left[\left[H_{ji}^{(A)}\right] \quad \left[H_{jj}^{(A)}\right] \quad -\left[H_{jk}^{(B)}\right]\right] \tag{3.34}$$

que é uma forma mais simples de escrever a expressão (3.29). Uma forma alternativa à expressão (3.34), proposta por Silva, Maia e Ribeiro em [56] é:

$$\left[H^{(C)}\right]= \\ \begin{bmatrix} \left[H_{ii}^{(A)}\right] & \left[H_{ij}^{(A)}\right] & [0] \\ [0] & [0] & \left[H_{jk}^{(B)}\right] \\ [0] & [0] & \left[H_{kk}^{(B)}\right] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\left[H_{ij}^{(A)}\right] \\ \left[H_{jj}^{(B)}\right] \\ \left[H_{kj}^{(B)}\right] \end{bmatrix} \cdot \left(\left[H_{jj}^{(A)}\right]+\left[H_{jj}^{(B)}\right]\right)^{-1} \cdot \left[\left[H_{ji}^{(A)}\right] \quad \left[H_{jj}^{(A)}\right] \quad -\left[H_{jk}^{(B)}\right]\right] \tag{3.35}$$

No âmbito deste trabalho utilizar-se-á a última, pelo simples facto de ser, quanto ao autor deste trabalho, mais inteligível que as anteriores. Refira-se ainda que esta expressão foi, das três apresentadas, a publicada mais recentemente.

Finalmente, deve-se sublinhar que em qualquer uma das expressões (3.32), (3.34) e (3.35), por só estar envolvida uma inversão de matrizes, é expectável que os problemas de índole numérica e o esforço computacional sejam minimizados relativamente à expressão clássica (3.29).

3.2.3. MODIFICAÇÕES ESTRUTURAIS CAUSADAS POR ALTERAÇÕES NA MASSA E RIGIDEZ

Ao acoplamento (ou desacoplamento) de subestruturas, correspondem modificações estruturais que podem ser descritas por qualquer um dos três modelos: espacial, modal e de resposta. Observando o modelo espacial, as alterações são a nível da massa, rigidez e amortecimento da estrutura, o que se traduz na alteração dos parâmetros modais, nomeadamente, frequências próprias. É então evidente que, também o modelo de resposta sofrerá alterações significativas, das quais se destacam:

- Efeitos nas características globais, nomeadamente, deslocamento das ressonâncias;

- Efeitos nas características locais, nomeadamente, deslocamento das anti-ressonâncias;

É fundamentalmente o segundo efeito, do ponto de vista da modificação estrutural, que interessa aprofundar neste trabalho. Por um lado, este é sem duvida um assunto menos discutido nos manuais, embora tenha sido feito, nomeadamente por Maia e Silva [4], Skingle [55] e Vincent [57]; por outro lado, encontram-se nessa formulação razões que justificam alguns dos problemas detectados na metodologia desenvolvida nas secções seguintes.

Para os devidos efeitos, na análise subsequente o amortecimento não é relevante, pelo que, nesta fase, não será incluído.

É possível prever-se facilmente quais as consequências das alterações nas massa e rigidez de um sistema nas anti-ressonâncias de um sistema. Utilizando o mesmo raciocínio que Afolabi [51], considere-se o sistema discreto com 3 graus de liberdade representado na Fig. 3.5.

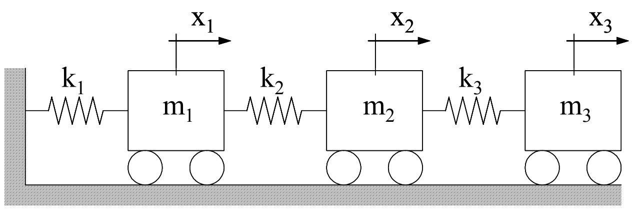


Fig. 3.5 Exemplo de um modelo discreto com três graus de liberdade

Substituindo na equação (3.9) (pág. 66) a matriz de rigidez dinâmica correspondente, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 - \omega^2 m_1 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 - \omega^2 m_2 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 - \omega^2 m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix} \qquad (3.36)$$

Utilizando o processo descrito na secção 3.1.2 para determinar as anti-ressonâncias, em que se eliminam as linhas e colunas relevantes em (3.36), chega-se ao seguinte resultado, que relaciona as frequências em que se verificam anti-ressonâncias nas FRF's directas:

$$\left(k_2 + k_3 - \mu_{11}^2 m_2\right)\left(k_3 - \mu_{11}^2 m_3\right) - k_3^2 = 0 \tag{3.37}$$

$$\left(k_1 + k_2 - \mu_{22}^2 m_1\right) = 0 \ \vee \ \left(k_3 - \mu_{22}^2 m_3\right) = 0 \tag{3.38}$$

$$\left(k_1 + k_2 - \mu_{33}^2 m_1\right)\left(k_2 + k_3 - \mu_{33}^2 m_2\right) - k_2^2 = 0 \tag{3.39}$$

As equações (3.37), (3.38) e (3.39) revelam que as anti-ressonâncias são "selectivamente sensíveis" a alterações nos parâmetros do sistema. Por exemplo, o valor da frequência da anti-ressonância obtida da receptância directa na coordenada 1, μ_{11}, pela equação (3.37), não é sensível a alterações nem de m_1 nem de k_1. Do mesmo modo, μ_{22} permanecerá constante se só se registarem alterações em m_2. Com μ_{33} a situação é análoga, sendo o seu valor independente de m_3.

Afolabi não abordou os termos transferidos, que embora sejam de fácil dedução, é de interesse relevante explicitar pelas suas implicações neste trabalho. Assim, partindo de (3.36), e procedendo do mesmo modo que para (3.37), (3.38) e (3.39), chega-se a:

$$-k_2\left(k_3 - \mu_{12}^2 m_3\right) = 0; \quad \mu_{21} = \mu_{12} \tag{3.40}$$

$$-k_3\left(k_1 + k_2 - \mu_{23}^2 m_1\right) = 0; \mu_{32} = \mu_{23} \tag{3.41}$$

não sendo possível calcular μ_{13} (porque não existe), o que se explica recorrendo à relação (3.12) (pág. 67)que estabelece o número máximo de anti-ressonâncias em função das coordenadas de resposta e de aplicação da força. Note-se que as equações (3.37), (3.38) e (3.39) têm duas soluções positivas cada e que as equações (3.40) e (3.41) têm apenas uma solução positiva. Note-se ainda que o número de soluções positivas está de acordo com a equação (3.12).

Voltando à análise das implicações das modificações estruturais a nível de massa e rigidez nas frequências das anti-ressonâncias, no que diz respeito às FRF's transferidas, observa-se que μ_{12} não é afectada por m_3 assim como μ_{23} não é afectada por m_1.

Resumem-se em seguida as principais conclusões que se podem tirar da análise precedente:

- A alteração da massa de um sistema numa determinada coordenada só afecta as anti-ressonâncias de FRF's cujas coordenadas de medição da resposta e de aplicação da força não sejam a coordenada da referida massa, i.e., as anti-ressonâncias de uma receptância α_{jk} manter-se-ão com a alteração de m_j ou m_k mas modificar-se-ão com $m_i(i \neq j,k)$;

- Quanto à rigidez, não é possível generalizar tal como se fez para a massa, atendendo a que a rigidez relaciona duas coordenadas (poder-se-ia ter acrescentado no presente exemplo, uma rigidez k_4 que relacionasse, por exemplo, as coordenadas 1 e 3). Por outro lado, nos desenvolvimentos subsequentes, não se considera o acoplamento de rigidez (por outras palavras, desprezam-se os potenciais efeitos da rigidez das juntas e do próprio bloco em forma de T). Por estes motivos, não se fará uma discussão em torno das consequências provenientes da alteração da rigidez, pois isso implicaria um estudo mais detalhado que não traz benefícios imediatos nem para a compreensão do trabalho subsequente nem para as suas conclusões.

3.3. ROTAÇÕES E MOMENTOS

3.3.1. INTRODUÇÃO

Considere-se uma matriz de mobilidade qualquer, $[H]$. No caso geral, esta matriz terá graus de liberdade de rotação θ e translação x, donde pode ser particionada como:

$$[H] = \begin{bmatrix} H_{xx} & H_{x\theta} \\ H_{\theta x} & H_{\theta\theta} \end{bmatrix} \tag{3.42}$$

em que os termos da matriz H_{xx}, $H_{x\theta}$, $H_{\theta x}$ e $H_{\theta\theta}$ são submatrizes de mobilidade que correspondem, respectivamente, a translações devidas a forças, translações devidas a momentos, rotações devidas a forças e rotações devidas a momentos.

Considerando que se medem apenas funções de transferência entre as forças e as translações, i.e., a submatriz H_{xx}, o modelo ficará obviamente incompleto. Por outras palavras, como em geral uma estrutura poderá ter tantos graus de liberdade de translação como de rotação, a dimensão de cada uma destas submatrizes será igual, o que significa que conhecer apenas H_{xx} é equivalente a conhecer apenas 25% do modelo que descreve o comportamento dinâmico da estrutura. Em situações mais optimistas, em que se toma como válido o princípio da reciprocidade, $H_{x\theta}$ e $H_{\theta x}$ são iguais, pelo que se poderá dizer que, no máximo, se conhece apenas 33% do modelo completo. Ainda assim, esta informação poderá não ser suficiente em muitos casos, nomeadamente em problemas que envolvam processos de acoplamento, já que, provavelmente, as rotações nas coordenadas de acoplamento poderão ser decisivas para o comportamento global da estrutura acoplada, pois poderão ser as responsáveis pela transmissão de solicitações entre as várias subestruturas. Por outro lado, em problemas que envolvam modificações estruturais caracterizadas por alterações em pelo menos um momento de inércia, as funções de transferência correspondentes a rotações do sistema não modificado são necessárias para estimar todos os termos da nova matriz de mobilidade.

Para medir directamente $H_{\theta x}$ e $H_{\theta\theta}$ seria necessário solicitar as estruturas com momentos puros (i.e., sem a aplicação simultânea de forças). Esta situação não tem sido conseguida com sucesso. Por outro lado, os transdutores que existem no mercado para medir rotações são de preço substancialmente mais elevado que os utilizados na medição de translações e nem sequer têm uma a relação qualidade/preço desejável [58].

Têm sido levantadas várias questões na implementação prática da medição directa de $H_{x\theta}$ e $H_{\theta\theta}$ o que conduziu à formulação de métodos alternativos. Na secção seguinte (3.3.2) são descritos dois métodos: o primeiro, um método que se poderá dizer clássico, está bastante divulgado na literatura da área; o segundo método, é objecto de estudo deste trabalho.

3.3.2. MÉTODOS DE DETERMINAÇÃO DA RESPOSTA EM ROTAÇÃO A UM MOMENTO PURO

3.3.2.1. MÉTODO CLÁSSICO

Considere-se uma medição de uma acelerância directa em que m_1 é a massa dos transdutores acoplados à estrutura. A força medida pelo transdutor de força (f_{med}) está relacionada com a massa adicional e com a força real (f_{real}) que seria aplicada se não houvesse massa adicional, através de:

$$f_{med} = f_{real} + m_1 \cdot \ddot{x} \tag{3.43}$$

Como f_{med} e $\ddot{x}$ foram medidos e m_1 é conhecido, é simples concluir que as FRF's correctas têm a forma:

$$\begin{aligned} Real\left(\frac{f_{real}}{\ddot{x}}\right) &= Real\left(\frac{f_{med}}{\ddot{x}}\right) - m_1 \\ Imag\left(\frac{f_{real}}{\ddot{x}}\right) &= Imag\left(\frac{f_{med}}{\ddot{x}}\right) \end{aligned} \tag{3.44}$$

Em termos de acelerância, segue-se que:

$$A_{real} = \frac{A_{med}}{1 - m_1 \cdot A_{med}} \tag{3.45}$$

As equações acima só são válidas para FRF's directas. Para FRF's transferidas e com outras cargas de inércia sobre a estrutura em teste, o problema torna-se mais complexo, não sendo por isso abordado neste trabalho.

Para se medirem rotações para além de translações, pode recorrer-se à utilização de um bloco rígido em forma de T. A técnica utiliza dois transdutores afastados de uma curta distância 2*s* na estrutura ou um bloco rígido auxiliar acoplado à estrutura de acordo com a Fig. 3.6. Assume-se que os sinais das acelerações de translação produzidos pelos transdutores podem ser traduzidos por uma translação e uma rotação num ponto P da estrutura entre as suas localizações, através das relações[29]:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_P &= \frac{\ddot{x}_A + \ddot{x}_B}{2} \\ \ddot{\theta}_P &= \frac{\ddot{x}_A - \ddot{x}_B}{2 \cdot s} \end{aligned} \tag{3.46}$$

[29] Note-se que esta expressão também é válida para velocidades ou deslocamentos por simples operações de integração.

Medir rotações apenas resolve metade do problema. Contudo, a aplicação de momentos é possível quando usada a técnica representada na Fig. 3.6. No fundo, pretende-se relacionar a força f_x e o momento m_θ com as respostas $\ddot{x}_P$ e $\ddot{\theta}_P$.

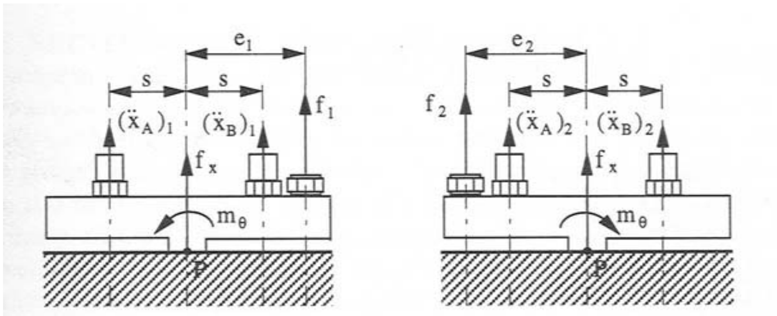


Fig. 3.6 Esquema de montagem dos blocos T para obtenção das FRF's rotacionais.

A generalização deste procedimento a um sistema de 2 graus de liberdade (uma translação e uma rotação) pode ser encontrada em [4] e [11], e consiste na realização de dois ensaios em que a força é aplicada em pontos diferentes do bloco T. Destes dois ensaios, quando os transdutores de resposta são acelerómetros, resulta um conjunto de acelerâncias que, por uma questão de conveniência, se podem dispor na forma matricial:

$$[G]=\begin{bmatrix} \dfrac{(\ddot{x}_A)_1}{f_1} & \dfrac{(\ddot{x}_A)_2}{f_2} \\ \dfrac{(\ddot{x}_B)_1}{f_1} & \dfrac{(\ddot{x}_B)_2}{f_2} \end{bmatrix} \tag{3.47}$$

O objectivo consiste em chegar à FRF do sistema desacoplado dos transdutores e escrita nas coordenadas x e θ, o que, em termos de receptância, é:

$$[\alpha(\omega)]=\begin{bmatrix} \alpha_{xx}(\omega) & \alpha_{x\theta}(\omega) \\ \alpha_{\theta x}(\omega) & \alpha_{\theta\theta}(\omega) \end{bmatrix} = -\frac{1}{\omega^2}[T]\cdot[G]\cdot\left[[\Pi]-[M]\cdot[T]\cdot[G]\right]^{-1} \tag{3.48}$$

com

$$[T]=\begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ (2s)^{-1} & -(2s)^{-1} \end{bmatrix} \tag{3.49}$$

$$[\Pi]=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ e_1 & -e_2 \end{bmatrix} \tag{3.50}$$

e

$$[M] = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \tag{3.51}$$

É importante notar que a matriz de inércia $[M]$ não contem nos seus termos referência à situação da carga (1 ou 2). De facto, este procedimento considera a solicitação em 2 aplicada simetricamente à solicitação em 1 (e_1=e_2). Nesse caso, a inércia de rotação do conjunto é igual para ambas as situações, em torno do ponto *P*.

Porém, em vez de se aplicar a força em pontos simétricos, uma das medições poderá ser feita, v.g., com a força aplicada no centro do bloco T por forma a minimizar os efeitos provocados pela flexibilidade da junta aquando da aplicação do momento em torno do ponto *P*. Assim, no produto $[M]\cdot[T]\cdot[G]$ da expressão (3.48), durante os cálculos, há que ter em atenção que se terá de corrigir casuisticamente os termos relacionados, i.e., quando se multiplicam as linhas de $[M]$ pela 1ª coluna de $[T]\cdot[G]$, $m = m_1$ e $I = I_1$, e quando se multiplicam as linhas de $[M]$ pela 2ª coluna de $[T]\cdot[G]$, $m = m_2$ e $I = I_2$. Note-se ainda que $m = m_1 = m_2$ pelo que só é necessário ter atenção ao valor dos momentos de inércia.

3.3.2.2. MÉTODO DE VARIAÇÃO NO MOMENTO DE INÉRCIA

A determinação do termo $\alpha_{\theta\theta}$ pelo método apresentado em 3.3.2.1 exige a aplicação de um momento, provocado por uma força descentrada, em torno do ponto de união entre a estrutura e o bloco T. A união é conseguida por uma junta que normalmente é colada, podendo no entanto ser constituída por um perno e uma rosca, por um íman ou até por uma combinação entre diferentes tipos de juntas. Como é evidente, para cada tipo de junta a rigidez varia, sendo preferível ter-se uma rigidez tão grande quanto possível, mas numa zona tão pequena quanto possível. Caso isso não seja viável, a própria junta terá efeitos nos resultados que poderão ser tanto mais evidentes quanto mais acentuado o momento aplicado. As Fig. 3.7 e Fig. 3.8 ilustram, ainda que de forma exagerada, a influência da rigidez da junta quando a solicitação é feita no centro do bloco T e na sua extremidade, respectivamente.

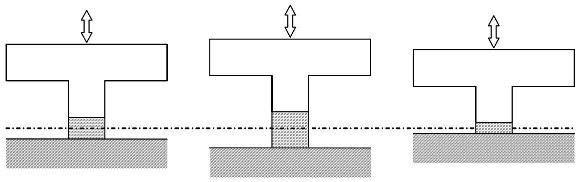


Fig. 3.7 Influência de uma junta de baixa rigidez na medição de uma FRF para carga aplicada ao centro de um bloco T.

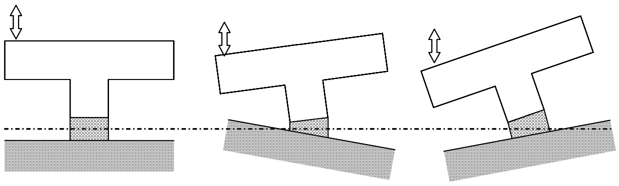


Fig. 3.8 Influência de uma junta de baixa rigidez na medição de uma FRF para carga aplicada na extremidade de um bloco T.

No caso da força ser aplicada no centro do bloco T (Fig. 3.7), os principais efeitos que se podem prever de uma junta não rígida, são aqueles que estão relacionados com a deformação da junta seja por tracção (i) seja por compressão (ii). No caso da força ser aplicada na extremidade do bloco T (Fig. 3.8), a junta já estará a ser sujeita simultaneamente a uma força e a um momento, podendo haver, para além dos esforços de tracção e compressão referidos, esforços de flexão. No limite, o movimento do T em relação à estrutura poderá ser do tipo (iii), em que a rotação do T é oposta à rotação da estrutura, ou do tipo (iv), em que T e estrutura rodam no mesmo sentido mas com amplitudes diferentes. Na realidade, o que se observa é uma combinação de ambos os fenómenos descritos, cujo significado depende do tipo de junta e da forma de aplicação da força. É evidente que estas situações são todas hipotéticas, mas é também claro que em geral a influência da rigidez à flexão é maior que a influência da rigidez à tracção ou à compressão, pelo que o erro que se deverá esperar num ensaio em que se aplique a força na extremidade do bloco T deverá ser superior ao erro obtido por um ensaio em que a força esteja aplicada no centro do bloco T.

Existem outras técnicas de aplicação do momento na estrutura ([19] e [30] a [33]), mas nenhuma delas é suficientemente eficiente para que os erros registados sejam em geral desprezáveis, ou pelo menos pouco significativos. Neste trabalho explora-se uma técnica desenvolvida por Maia, Silva e Ribeiro em [36] e [39], embora aqui se utilize uma metodologia modificada que permite evidenciar com mais clareza as relações existentes entre a determinação dos termos de translação e rotação com as operações de desacoplamento.

Esta técnica consiste em utilizar o mesmo bloco rígido em forma de T, com a força aplicada apenas no seu centro e em que se fazem duas medições orientando o T em duas posições ortogonais entre si conforme ilustrado na (Fig. 3.9).

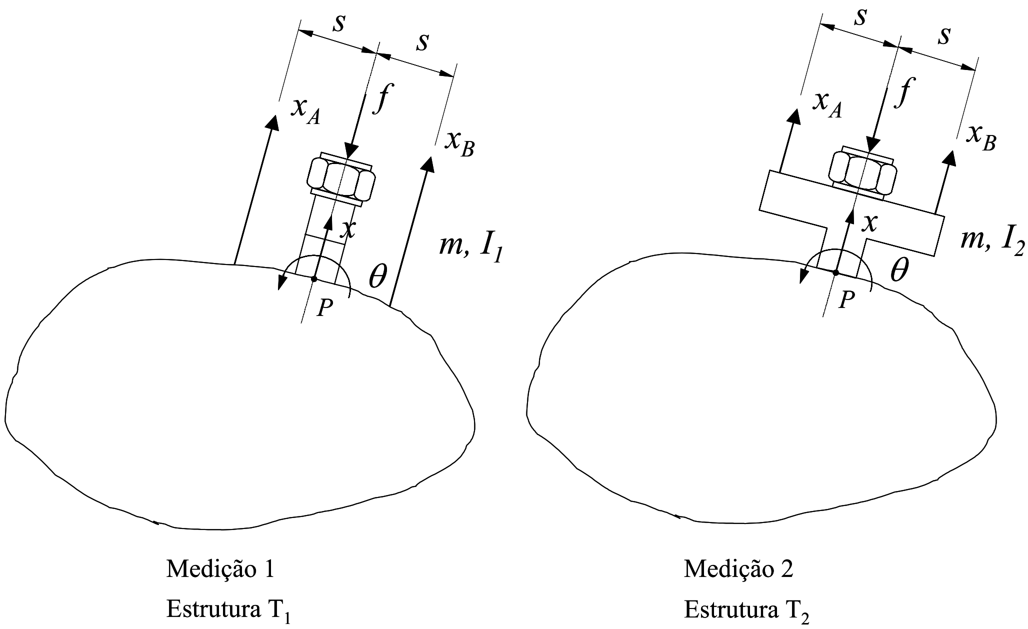


Fig. 3.9 Esquemas das 2 medições experimentais.

A resposta pode ser medida tanto sobre o T como sobre a própria estrutura, desde que se garanta que o bloco em T é suficientemente rígido na gama de frequências de interesse. A relação entre as coordenadas x_A e x_B e as coordenadas x e θ obtém-se da expressão (3.46) (pág. 84).

Em condições ideais[30], os únicos parâmetros que se alteraram da medição 1 para a medição 2 foram os momentos de inércia do conjunto em torno dos eixos perpendiculares aos planos do T que passam pelo ponto P.

[30] Isto é, em que se verifique repetibilidade e em que não haja alteração de outros parâmetros, nomeadamente, rigidez local.

Considerando agora que apenas tem interesse o estudo do comportamento no plano do papel, pode desenvolver-se o raciocínio subsequente: a estrutura 'T_2' da Fig. 3.9 pode ser vista como o resultado do acoplamento entre a estrutura 'T_1' e um momento de inércia $I_B = I_2 - I_1$; portanto, de acordo com a notação utilizada na secção 3.2.2 (*vide* também expressão (3.31), pág. 78), pode dizer-se que:

$$A \equiv T_1; \qquad B \equiv I_B; \qquad C \equiv T_2; \qquad T_2 \equiv T_1 \oplus I_B$$

Das duas medições realizadas, e atendendo à expressão (3.46), resultam 4 FRF's: $H_{xx}^{(T_1)}$, $H_{x\theta}^{(T_1)}$, $H_{xx}^{(T_2)}$ e $H_{x\theta}^{(T_2)}$, em que os índices 1 e 2 se referem às medições 1 e 2 respectivamente.

Recordando a expressão (3.35):

$$\left[H^{(C)}\right]=$$
$$\begin{bmatrix} \left[H_{ii}^{(A)}\right] & \left[H_{ij}^{(A)}\right] & [0] \\ [0] & [0] & \left[H_{jk}^{(B)}\right] \\ [0] & [0] & \left[H_{kk}^{(B)}\right] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\left[H_{ij}^{(A)}\right] \\ \left[H_{jj}^{(B)}\right] \\ \left[H_{kj}^{(B)}\right] \end{bmatrix} \cdot \left(\left[H_{jj}^{(A)}\right]+\left[H_{jj}^{(B)}\right]\right)^{-1} \cdot \left[\left[H_{ji}^{(A)}\right] \quad \left[H_{jj}^{(A)}\right] \quad -\left[H_{jk}^{(B)}\right]\right] \tag{3.35}$$

a matriz $\left[H^{(A)}\right] \equiv \left[H^{(T_2)}\right]$ será de ordem 2 e a matriz $\left[H^{(B)}\right] \equiv \left[H^{(I_B)}\right]$ será de ordem 1 - um escalar, já que representa uma simples modificação do momento de inércia. A coordenada x corresponde a i, a coordenada θ corresponde a j e, neste caso, não existem coordenadas k. Notando que $H_{\theta\theta}^{(B)} = 1/I_B$ é o único elemento da matriz $\left[H^{(B)}\right]$, a equação (3.35) pode ser reduzida a:

$$\begin{bmatrix} H_{xx}^{(C)} & H_{x\theta}^{(C)} \\ H_{\theta x}^{(C)} & H_{\theta\theta}^{(C)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{xx}^{(A)} & H_{x\theta}^{(A)} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{Bmatrix} -H_{x\theta}^{(A)} \\ 1/I_B \end{Bmatrix} \cdot \frac{1}{H_{\theta\theta}^{(A)} + 1/I_B} \cdot \begin{Bmatrix} H_{\theta x}^{(A)} \\ H_{\theta\theta}^{(A)} \end{Bmatrix}^T \tag{3.52}$$

ou, escrita noutra forma:

$$\begin{bmatrix} H_{xx}^{(C)} & H_{x\theta}^{(C)} \\ H_{\theta x}^{(C)} & H_{\theta\theta}^{(C)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{xx}^{(A)} - \dfrac{I_B H_{\theta x}^{(A)} H_{x\theta}^{(A)}}{H_{\theta\theta}^{(A)} I_B + 1} & H_{x\theta}^{(A)} - \dfrac{I_B H_{x\theta}^{(A)} H_{\theta\theta}^{(A)}}{H_{\theta\theta}^{(A)} I_B + 1} \\ \dfrac{H_{\theta x}^{(A)}}{H_{\theta\theta}^{(A)} I_B + 1} & \dfrac{H_{\theta\theta}^{(A)}}{H_{\theta\theta}^{(A)} I_B + 1} \end{bmatrix} \tag{3.53}$$

Como $H_{\theta x}^{(C)}$ e $H_{\theta x}^{(A)}$ são conhecidas, pois $H_{x\theta}^{(C)}$ e $H_{x\theta}^{(A)}$ foram medidas experimentalmente, e considerando o princípio da reciprocidade, é possível determinar-se matematicamente $H_{\theta\theta}^{(A)}$ através de $H_{\theta x}^{(C)}$:

$$H_{\theta\theta}^{(A)} = \frac{1}{I_B}\left(\frac{H_{x\theta}^{(A)}}{H_{x\theta}^{(C)}} - 1\right) \tag{3.54}$$

Também se poderia ter chegado a este resultado partindo da equação que contém a FRF $H_{x\theta}^{(C)}$. Da expressão (3.53) é também evidente que se pode determinar $H_{\theta\theta}^{(C)}$:

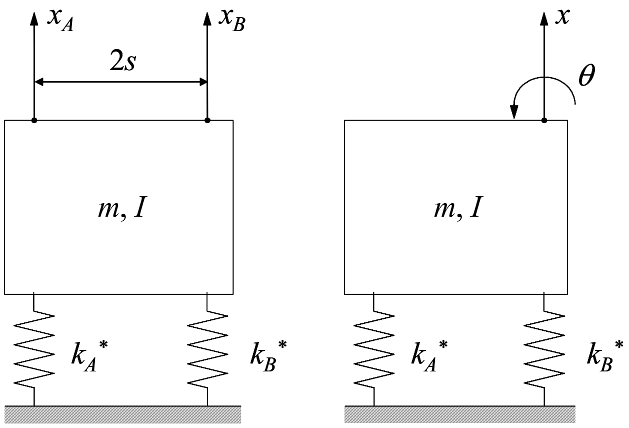
$$H_{\theta\theta}^{(C)} = \left(I_B + \frac{1}{H_{\theta\theta}^{(A)}}\right)^{-1} \tag{3.55}$$

Ficou demonstrado, pelo menos do ponto de vista teórico, que é possível determinar a resposta em rotação a um momento puro, i.e., um termo $H_{\theta\theta}$, sem que seja efectivamente aplicado o momento à estrutura. Este resultado é particularmente importante, pois permite contornar todos os problemas normalmente associados à aplicação e medição de momentos.

Uma vez determinada toda a matriz de resposta em frequência, o procedimento de cancelamento de massas torna-se trivial, como será confirmado no capítulo 3.4 em que se aplica o procedimento completo a um exemplo numérico de 2 graus de liberdade.

3.4. EXEMPLO NUMÉRICO PARA UM SISTEMA DISCRETO DE 2 GRAUS DE LIBERDADE

Considere-se o sistema, designado por 'O', constituído por um corpo rígido (de massa m e momento de inércia I) e duas molas (com constantes de rigidez k_A e k_B e amortecimentos histeréticos η_A e η_B) representado na Fig. 3.10. À esquerda descreve-se o movimento através de duas coordenadas de translação, x_A e x_B, distanciadas entre si de $2s$, enquanto que à direita se utilizam uma coordenada de translação e uma coordenada de rotação, x e θ, respectivamente.



$k_A = 10\ 000$ N/m $\quad \eta_A = 0.005$
$k_B = 7\ 000$ N/m $\quad \eta_B = 0.015$
$k_A^* = k_A(1+ i\eta_A)$
$k_B^* = k_B(1+ i\eta_B)$

$m = 0.5$ kg
$I = 5\text{x}10^{-4}$ kgm^2

$2s = 0.02$ m

Sistema 'O'

Fig. 3.10 Sistema discreto de dois graus de liberdade constituído por uma massa e duas molas associadas em paralelo (Sistema 'O')

As coordenadas x_A e x_B podem-se relacionar com x e θ através da relação:

$$\begin{aligned} x &= x_B \\ \theta &= \frac{x_B - x_A}{2s} \end{aligned} \tag{3.56}$$

A caracterização dinâmica deste sistema, seja ela descrita pelo modelo espacial, modal ou de resposta é elementar. Como se trata de um modelo teórico, e porque os desenvolvimentos posteriores serão feitos à volta de funções de resposta em frequência, interessa caracterizar o modelo de resposta deste sistema.

As matrizes de rigidez $[K]$ e de massa $[M]$ deste sistema, que figuram nas equações do movimento (2.1) e (2.2) da pág. 10 (com $[C]=[D]=[0]$), conseguem-se obter aplicando as equações de Lagrange [59] para um sistema de n graus de liberdade não amortecido:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = Q_i \tag{3.57}$$

em que q_i são coordenadas generalizadas independentes que definem a posição do sistema em qualquer instante, T é a energia cinética, V é a energia potencial elástica e Q_i são as forças generalizadas correspondentes às coordenadas q_i. Neste caso em particular tem-se $q_1 \equiv x$, $q_2 \equiv \theta$, $Q_1 \neq 0$ e $Q_2 = 0$. As energias cinética e potencial podem ser expressas como:

$$T = \frac{1}{2}\{\dot{q}\}[M]\{\dot{q}\} \tag{3.58}$$

$$V = \frac{1}{2}\{q\}[K]\{q\} \tag{3.59}$$

Atendendo às relações estabelecidas na secção 2.1 e reunidas resumidamente na Fig. 2.1 (pág. 12), consegue-se facilmente chegar a uma relação directa entre o modelo de resposta e o modelo espacial, usando o modelo modal nos passos intermédios:

$$[\alpha(\omega)] = \left[\left([K] - \omega^2 [M]\right)\right]^{-1} \tag{3.60}$$

em que a matriz de receptância será do tipo:

$$[\alpha(\omega)] = \begin{bmatrix} \alpha_{xx}(\omega) & \alpha_{x\theta}(\omega) \\ \alpha_{\theta x}(\omega) & \alpha_{\theta\theta}(\omega) \end{bmatrix} \tag{3.61}$$

A representação do valor absoluto de cada um dos termos da matriz (3.61) em diagrama de Bode (Fig. 3.11) pode ser feita em termos de acelerância, considerando a relação existente entre receptância, mobilidade e acelerância [4]:

$$-\omega^2 \cdot \alpha(\omega) = i\omega \cdot Y(\omega) = A(\omega) \tag{3.62}$$

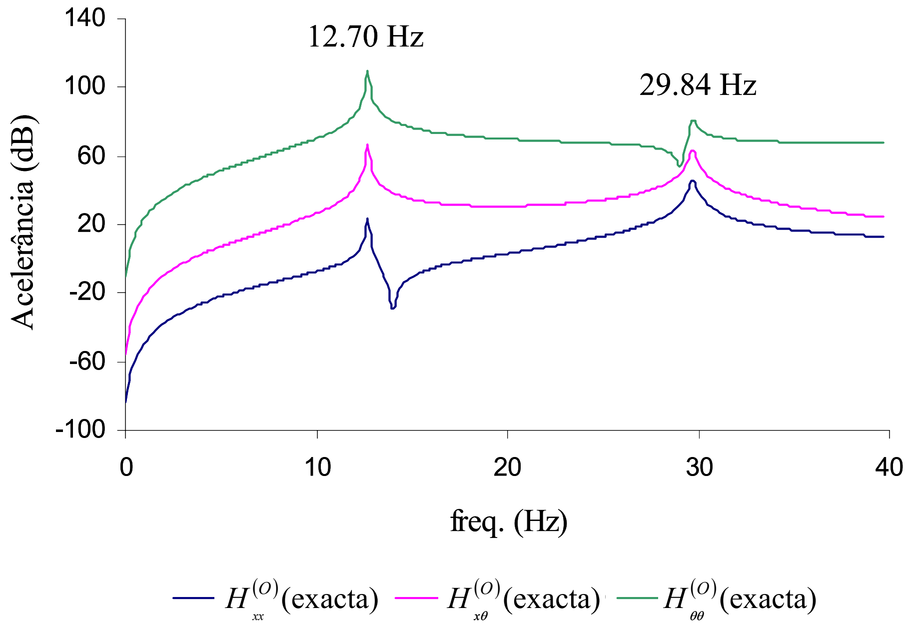


Fig. 3.11 FRF's (acelerâncias) do modelo discreto de 2 graus de liberdade representado na Fig. 3.10 (Sistema 'O').

As FRF's representadas na Fig. 3.11 correspondem a parte[31] da caracterização dinâmica do sistema 'O' representado na Fig. 3.10. No entanto é sabido que, experimentalmente, não é possível obter rigorosamente o modelo de resposta do sistema em estudo, mas sim do conjunto formado pelo sistema 'O' e instrumentos de medida, em particular, transdutores de força e de resposta. Noutras palavras, medir em condições experimentais a curva da Fig. 3.11, assumindo o sistema da Fig. 3.10 como sendo real, é fisicamente impossível.

A utilização de transdutores LASER vem minimizar a influência dos aparelhos de medida, nomeadamente dos transdutores de resposta, mas, no que diz respeito à aplicação da força, as alterações locais de massa e rigidez são inevitáveis, situação essa abordada na secção 2.2.3 do presente trabalho. Logo, para se chegar a esta FRF há que aplicar um algoritmo de desacoplamento à FRF medida experimentalmente, v.g., baseada na técnica de acoplamento de impedâncias (*vide* 3.2.2). A este procedimento é usual designar-se Cancelamento de Massas.

Por outro lado, aplicar apenas uma força na coordenada x, assumindo que se estão a medir as respostas em x e θ, só permite determinar três termos da matriz de receptâncias: $\alpha_{xx}(\omega)$, $\alpha_{x\theta}(\omega)$ e, considerando válido o princípio da reciprocidade, $\alpha_{\theta x}(\omega)$. A determinação do termo $\alpha_{\theta\theta}(\omega)$ pode ser feita experimentalmente por aplicação de um momento ou através do recurso ao modelo matemático introduzido em 3.3.2.2. Este procedimento consiste na utilização de um bloco rígido em forma de T que se faz rodar 90º em torno do seu eixo de simetria. Ao modelo da Fig. 3.10 acresce então este bloco e o transdutor de força para simular uma situação real experimental em que se utiliza o transdutor LASER como transdutor de resposta. Estes sistemas, que estão representados na Fig. 3.12 designar-se-ão de sistemas 'T_1' e 'T_2', nomenclatura que já havia sido utilizada na secção 3.3.2.2.

[31] Note-se que os termos da matriz de resposta em frequência são em geral números complexos pelo que, para além do módulo, é ainda necessário contemplar a fase para que o modelo de resposta possa ser considerado completo.

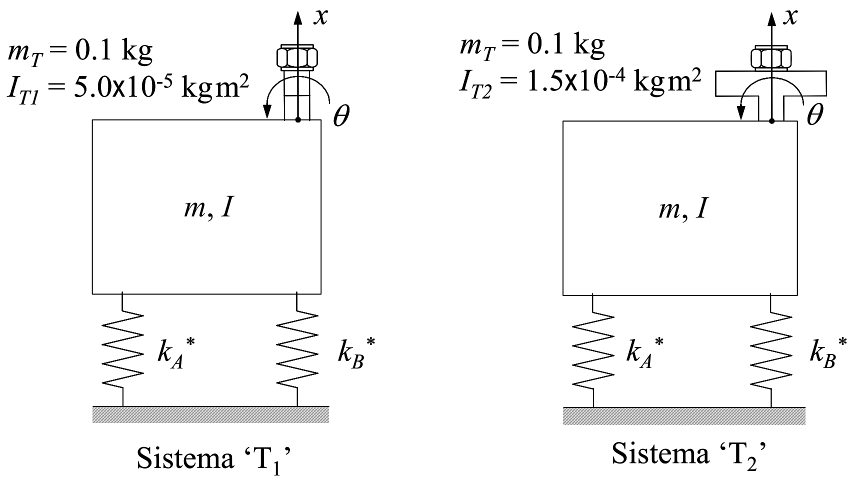


Fig. 3.12 Esquemas dos 2 modelos numéricos, 'T_1' e 'T_2', correspondentes à Fig. 3.9 (pág. 88).

De acordo com o que foi exposto na secção 3.3.2.2, e de acordo com a notação utilizada na secção 3.2.2 (*vide* também expressão (3.31) (pág. 78)):

$$A \equiv T_1 ; \qquad B \equiv I_B ; \qquad C \equiv T_2 ; \qquad T_2 \equiv T_1 \oplus I_B$$

poder-se-ão deduzir os termos $H_{\theta\theta}^{(T_1)} \equiv H_{\theta\theta}^{(A)}$ e $H_{\theta\theta}^{(T_2)} \equiv H_{\theta\theta}^{(C)}$ através das relações (3.54) e (3.55) (pág. 90) respectivamente em que o momento de inércia a cancelar é:

$$I_B = I_{T2} - I_{T1} = 1.0 \times 10^{-4}\,\text{kgm}^2$$

Podem-se rescrever estas relações nesta notação da seguinte forma[32]:

$$H_{\theta\theta}^{(T_1)} = \frac{1}{I_{T2} - I_{T1}} \left(\frac{H_{x\theta}^{(T_1)}}{H_{x\theta}^{(T_2)}} - 1 \right) \tag{3.63}$$

$$H_{\theta\theta}^{(T_2)} = \left(\left(I_{T2} - I_{T1} \right) + \frac{1}{H_{\theta\theta}^{(T_1)}} \right)^{-1} \tag{3.64}$$

As FRF's dos sistemas 'T_1' e 'T_2' representados na Fig. 3.12 apresentam-se nas Fig. 3.13 e Fig. 3.14 respectivamente, estabelecendo-se a comparação entre as curvas "medida",

[32] Ao longo do texto poderão ser encontradas reproduções de algumas expressões, nomeadamente as (3.54) e (3.55), com o objectivo de situar o leitor na análise que se está a realizar.

exacta e derivada e em que se apresentam, a cinzento, outras curvas envolvidas nos cálculos.

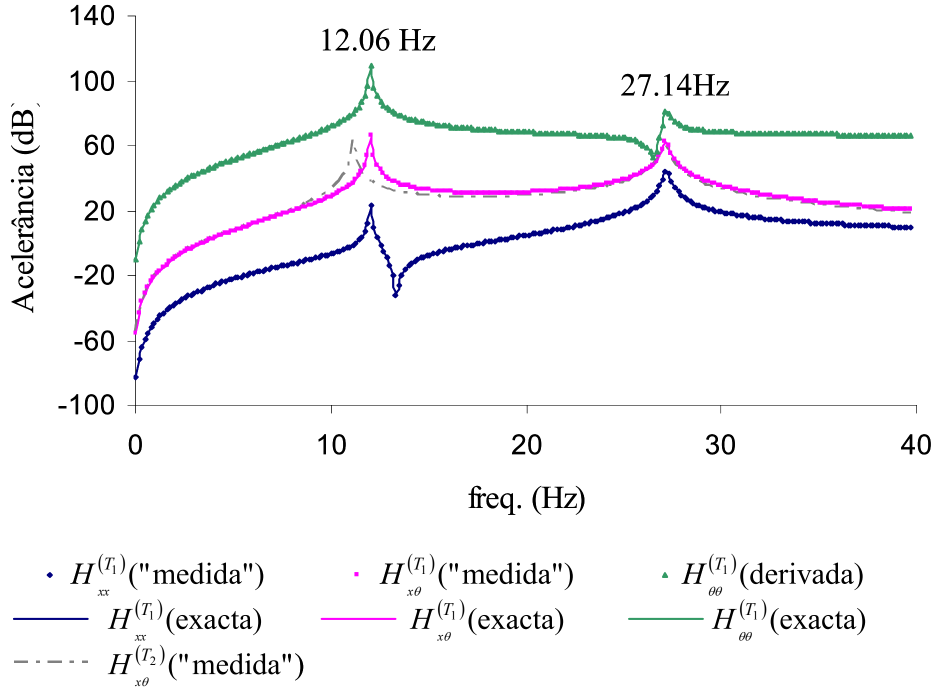


Fig. 3.13 FRF's medidas, derivadas e exactas para o sistema 'T_1' representado na Fig. 3.12.

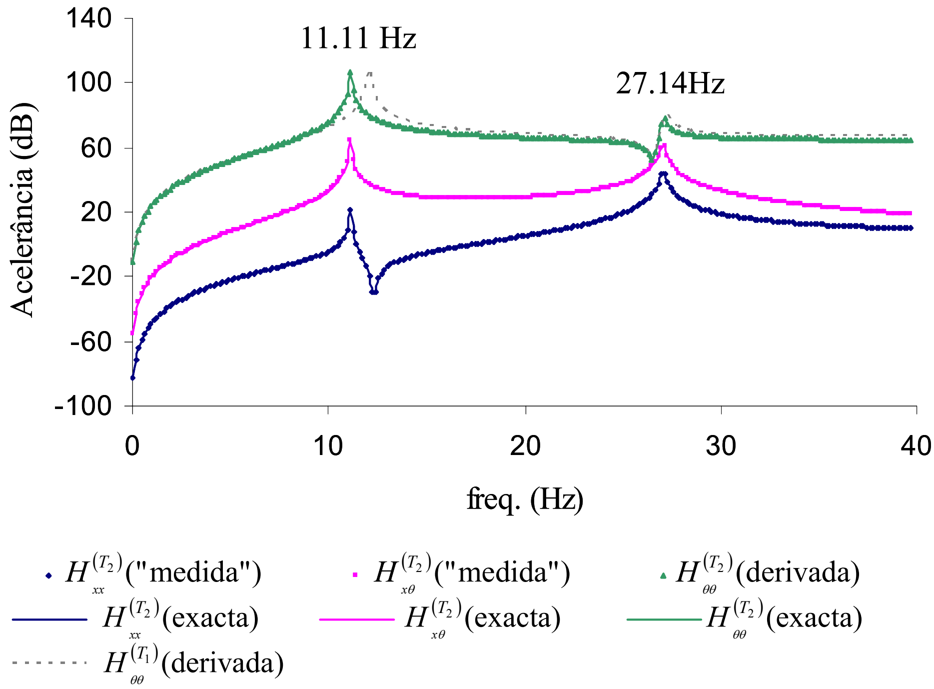


Fig. 3.14 FRF's medidas, derivadas e exactas para o sistema 'T_2' representado na Fig. 3.12.

O processo de cancelamento conduzido permitiu caracterizar totalmente as FRF's dos sistemas 'T_1' e 'T_2' nas coordenadas x e θ. É agora possível obter-se a FRF da estrutura 'O' representada na Fig. 3.10, partindo destes resultados. Para isso, aplica-se sucessivamente a técnica de acoplamento estabelecida em 3.3.2.2 e que conduziu à formulação da expressão (3.53) (pág. 89). O sistema 'T_1' difere do sistema 'O' porque tem uma massa adicional m_T na coordenada x e um momento de inércia adicional I_{T1} na coordenada θ. É importante notar que:

$$T_i = O \oplus m_T \oplus I_{Ti}, \qquad i = 1{,}2$$

Por outras palavras, os blocos ficam perfeitamente caracterizados no modelo matemático se forem definidos como sendo o acoplamento entre uma massa e um momento de inércia puros. Porque a técnica de acoplamento utilizada só cancela um termo do bloco T de cada vez[33], será vantajoso passar a utilizar a notação:

$$H_{pq}^{(O,m_T,I_{Ti})} \equiv H_{pq}^{(T_i)}; \quad i = 1{,}2; \quad p,q = x,\theta$$

Portanto, para se passar do sistema 'T_1' para o sistema original 'O', terá que se proceder ao cancelamento de m_T e de I_{T1}. Para o cancelamento do momento de inércia I_{T1} recorre-se novamente à expressão (3.53), que, na nomenclatura utilizada neste exemplo se escreve:

$$\begin{bmatrix} H_{xx}^{(O,m_T,I_{T1})} & H_{x\theta}^{(O,m_T,I_{T1})} \\ H_{\theta x}^{(O,m_T,I_{T1})} & H_{\theta\theta}^{(O,m_T,I_{T1})} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{xx}^{(O,m_T)} - \dfrac{I_{T1} H_{\theta x}^{(O,m_T)} H_{x\theta}^{(O,m_T)}}{H_{\theta\theta}^{(O,m_T)} I_{T1} + 1} & H_{x\theta}^{(O,m_T)} - \dfrac{I_{T1} H_{x\theta}^{(O,m_T)} H_{\theta\theta}^{(O,m_T)}}{H_{\theta\theta}^{(O,m_T)} I_{T1} + 1} \\ \dfrac{H_{\theta x}^{(O,m_T)}}{H_{\theta\theta}^{(O,m_T)} I_{T1} + 1} & \dfrac{H_{\theta\theta}^{(O,m_T)}}{H_{\theta\theta}^{(O,m_T)} I_{T1} + 1} \end{bmatrix} \tag{3.65}$$

---

33 Na realidade, em [36] demonstra-se que é possível fazer o cancelamento de todos os termos em simultâneo. Porém, essas expressões são facilmente deduzíveis utilizando a técnica de desacoplamento (tal como está a ser apresentada neste trabalho) em passos sucessivos por substituição de variáveis nas funções intermédias que estão inter-relacionadas. Se por um lado o cancelamento simultâneo apresenta vantagens do ponto de vista do esforço computacional, nomeadamente no tempo de processamento de dados, por outro lado, oculta os problemas associados a esta técnica que é o contributo fundamental que este trabalho pretende oferecer. Por estas razões, não serão apresentadas neste trabalho expressões que permitam fazer o cancelamento simultâneo, até porque, acresce nesse método a perda de generalidade por cada expressão estar associada a um procedimento em particular.

obtendo-se uma matriz $\begin{bmatrix} H_{xx}^{(O,m_T)} & H_{x\theta}^{(O,m_T)} \\ H_{\theta x}^{(O,m_T)} & H_{\theta\theta}^{(O,m_T)} \end{bmatrix}$ cujos termos estão representados na Fig. 3.15 e que traduz o comportamento dinâmico de uma estrutura 'O' com 2 graus de liberdade x e θ com uma massa adicional m_T=0.1kg colocada na coordenada x.

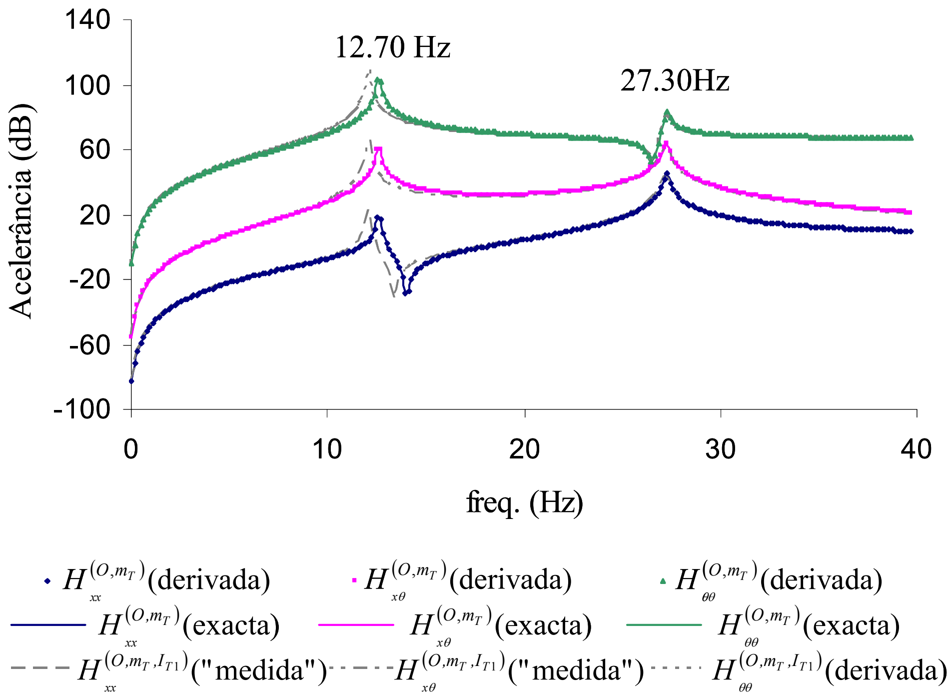


Fig. 3.15 FRF's medidas, derivadas e exactas para um sistema $O \oplus m_T$.

No que diz respeito ao cancelamento da massa propriamente dita, o procedimento é idêntico ao utilizado para cancelar o momento de inércia, partindo-se da expressão (3.35) (pág. 79), em que:

$$A \equiv O \,; \qquad B \equiv m_B \equiv m_T \,; \qquad C \equiv O \oplus m_T$$

donde se obtém uma relação análoga à relação (3.53), que, na mesma notação que a utilizada em (3.65) se escreve:

$$\begin{bmatrix} H_{\theta\theta}^{(O,m_T)} & H_{\theta x}^{(O,m_T)} \\ H_{x\theta}^{(O,m_T)} & H_{xx}^{(O,m_T)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{\theta\theta}^{(O)} - \dfrac{m_T H_{\theta x}^{(O)} H_{x\theta}^{(O)}}{H_{xx}^{(O)} m_T + 1} & H_{\theta x}^{(O)} - \dfrac{m_T H_{\theta x}^{(O)} H_{xx}^{(O)}}{H_{xx}^{(O)} m_T + 1} \\ \dfrac{H_{x\theta}^{(O)}}{H_{xx}^{(O)} m_T + 1} & \dfrac{H_{xx}^{(O)}}{H_{xx}^{(O)} m_T + 1} \end{bmatrix} \tag{3.66}$$

Esta última expressão permite-nos chegar a $\begin{bmatrix} H_{xx}^{(O)} & H_{x\theta}^{(O)} \\ H_{\theta x}^{(O)} & H_{\theta\theta}^{(O)} \end{bmatrix}$ cujos diagramas de Bode estão representados na Fig. 3.16.

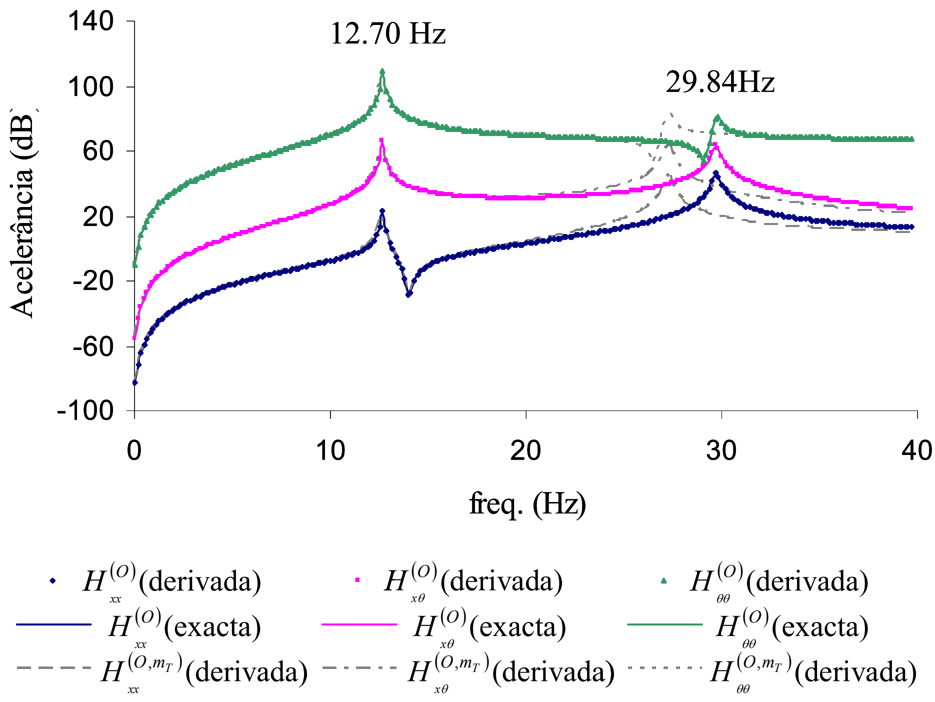


Fig. 3.16 FRF's derivadas e exactas para o sistema 'O' representado na Fig. 3.10.

A observação das curvas representadas nas Fig. 3.13, Fig. 3.14, Fig. 3.15 e Fig. 3.16, e, em especial, das curvas adicionais utilizadas durante os cálculos (representadas, caso a caso, a cor cinzenta) permite não só concluir a validade do método (pelo menos numa perspectiva teórica) como também evidenciar o tipo de modos que caracteriza o sistema elaborado. De facto, a análise deste procedimento permite tirar algumas conclusões relevantes. Como se pode verificar, o primeiro modo é essencialmente um modo de rotação enquanto que o segundo modo é essencialmente um modo de translação, o que é evidenciado pela forma como as ressonâncias variam aquando da alteração dos momentos de inércia e da massa. Este conhecimento vai desempenhar um papel fundamental na análise que se segue. Quando se altera o momento de inércia de 'T_2' para 'T_1' (cancelamento de $I_B = I_{T2} - I_{T1}$), a primeira ressonância passa de 11.11Hz (Fig. 3.14) para 12.06Hz (Fig. 3.13), mantendo-se a segunda ressonância nos 27.14Hz. Quando se cancela o momento de inércia I_{T1}, a primeira ressonância passa de 12.06Hz (Fig. 3.13) para 12.70Hz (Fig. 3.15) e a segunda ressonância passa de 27.14Hz (Fig. 3.13) para 27.30Hz (Fig. 3.15). Refira-se que a resolução da frequência é de ≈0.16Hz, pelo que estas diferenças encontradas no segundo modo são perfeitamente justificáveis. No que diz respeito ao cancelamento da massa m_T, observa-se que a frequência natural do segundo modo aumenta de 27.30Hz (Fig. 3.15) para os 29.84Hz Fig. 3.16, mantendo-se a primeira ressonância nos 12.70Hz.

Apesar do exemplo numérico ilustrado demonstrar a validade do método, não nos podemos esquecer que este método só poderá ter interesse se a sua aplicação com dados reais produzir bons resultados. Deste modo, decidiu-se repetir o mesmo estudo poluindo deliberadamente os dados com erros aleatórios, com vista a simular resultados obtidos por via experimental. Como as "medições" são feitas através de transdutores independentes colocados em coordenadas x_A e x_B, o ruído foi introduzido directamente "canal" a "canal". A Fig. 3.17 mostra os resultados após aplicação de um erro aleatório de ±1% às partes real e imaginária de cada uma das acelerâncias "experimentais".

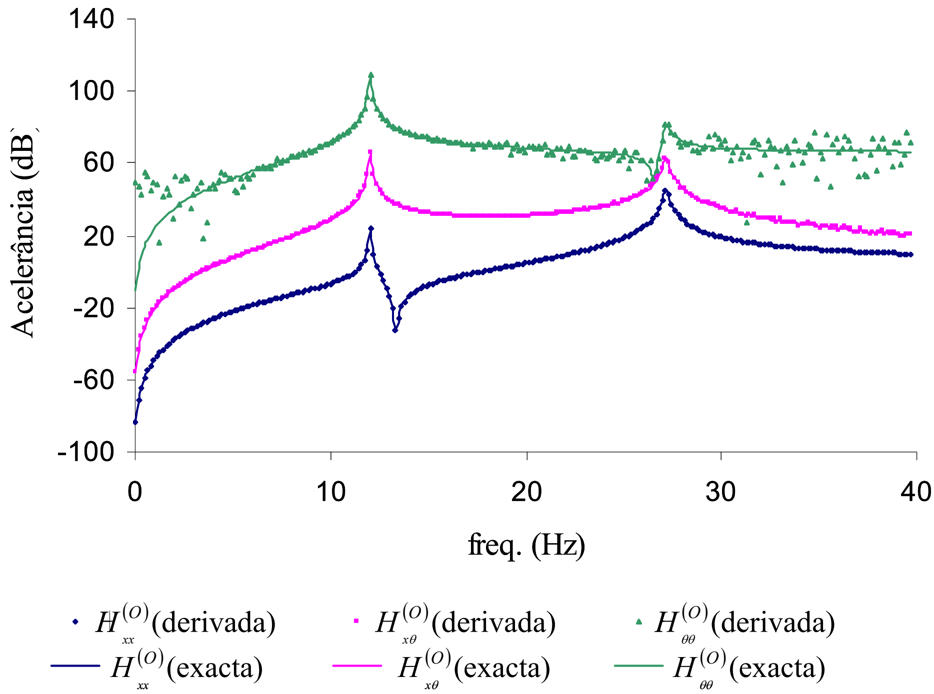


Fig. 3.17 FRF's derivadas e exactas para o sistema 'O' representado na Fig. 3.10 (dados iniciais poluídos com um erro aleatório de ±1%).

Estes resultados são algo desencorajadores, já que, para um erro aleatório inicial de ±1%, que não é excessivamente alto, a dispersão em determinadas regiões das FRF's pode chegar a "camuflar" alguns modos, em especial de $H_{\theta\theta}^{(O)}$.

Uma observação importante tem que ver com $H_{\theta\theta}^{(O)}$ apresentar uma dispersão muito acentuada na vizinhança do segundo modo (modo predominantemente de translação) mas praticamente coincidir com a curva exacta (sem ruído) na vizinhança do primeiro modo (modo predominantemente de rotação). No que diz respeito a $H_{x\theta}^{(O)}$, esta observação é igualmente válida, embora a escala da dispersão seja obviamente bastante mais reduzida. Para que se compreenda bem este fenómeno, interessa recuar um pouco no procedimento de cálculo.

As curvas que se extraem inicialmente do procedimento experimental são $H_{xx_A}^{(O,m_T,I_{T1})}$, $H_{xx_B}^{(O,m_T,I_{T1})}$, $H_{xx_A}^{(O,m_T,I_{T2})}$ e $H_{xx_B}^{(O,m_T,I_{T2})}$. Estas são as funções directamente poluídas com o ruído experimental aleatório de ±1%. Após transformação de coordenadas apropriada (*vide* expressão (3.56) da pág. 91), obtêm-se as curvas $H_{xx}^{(O,m_T,I_{T1})}$, $H_{x\theta}^{(O,m_T,I_{T1})}$, $H_{xx}^{(O,m_T,I_{T2})}$ e $H_{x\theta}^{(O,m_T,I_{T2})}$. Com $H_{x\theta}^{(O,m_T,I_{T1})}$ e $H_{x\theta}^{(O,m_T,I_{T2})}$ é possível determinar $H_{\theta\theta}^{(O,m_T,I_{T1})}$ utilizando a relação (3.54) ou (3.63), que, na notação correntemente utilizada se escreve:

$$H_{\theta\theta}^{(0,m_T,I_{T1})} = \frac{1}{I_{T2}-I_{T1}}\left(\frac{H_{x\theta}^{(0,m_T,I_{T1})}}{H_{x\theta}^{(0,m_T,I_{T2})}}-1\right) \tag{3.67}$$

A representação gráfica das FRF's envolvidas nesta última equação pode ser vista na Fig. 3.18.

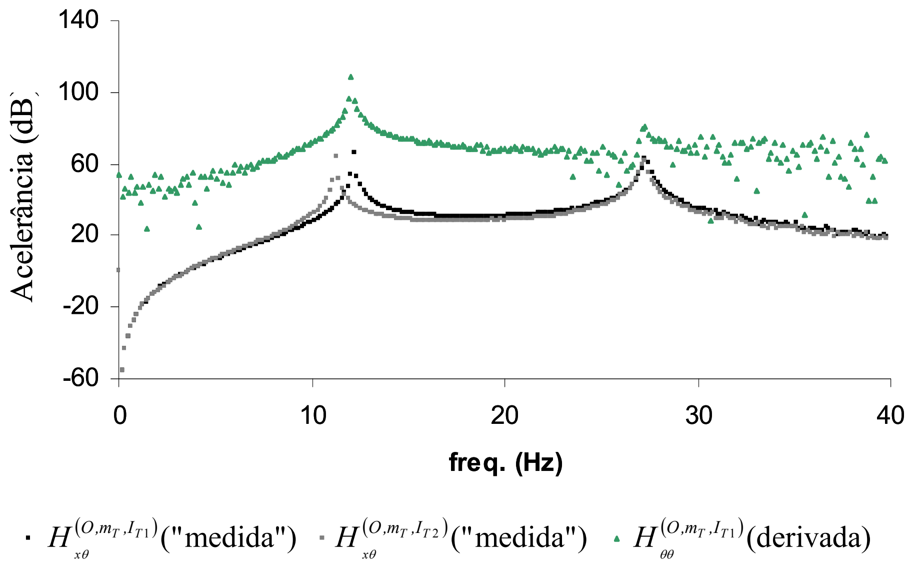


Fig. 3.18 FRF's envolvidas na equação (3.67) (dados iniciais poluídos com erro aleatório de ±1%).

Começa a tornar-se claro o porquê de haver maior grau de dispersão no termo $H_{\theta\theta}$ que nos restantes na vizinhança do segundo modo, pois quando $H_{x\theta}^{(O,m_T,I_{T1})}$ e $H_{x\theta}^{(O,m_T,I_{T2})}$ são muito próximos se estará a obter, para o valor entre parêntesis em (3.67), um número que poderá ser de ordem de grandeza do erro como consequência de um fenómeno numérico conhecido por cancelamento subtractivo [49]. Esta poderá ser uma explicação possível para a "ampliação" do erro original de ±1%, mas não será a única.

Observem-se novamente os termos $H_{x\theta}$. A questão que se poderá agora colocar está relacionada com a origem do ruído visível nestas curvas. Para se compreender bem a sua causa, mostram-se na Fig. 3.19 as curvas nas coordenadas x_A e x_B utilizadas para calcular $H_{x\theta}^{(O,m_T,I_{T1})}$ através da expressão (3.56) ($H_{x\theta}^{(O,m_T,I_{T2})}$ tem aspecto semelhante, diferindo apenas no valor das ressonâncias).

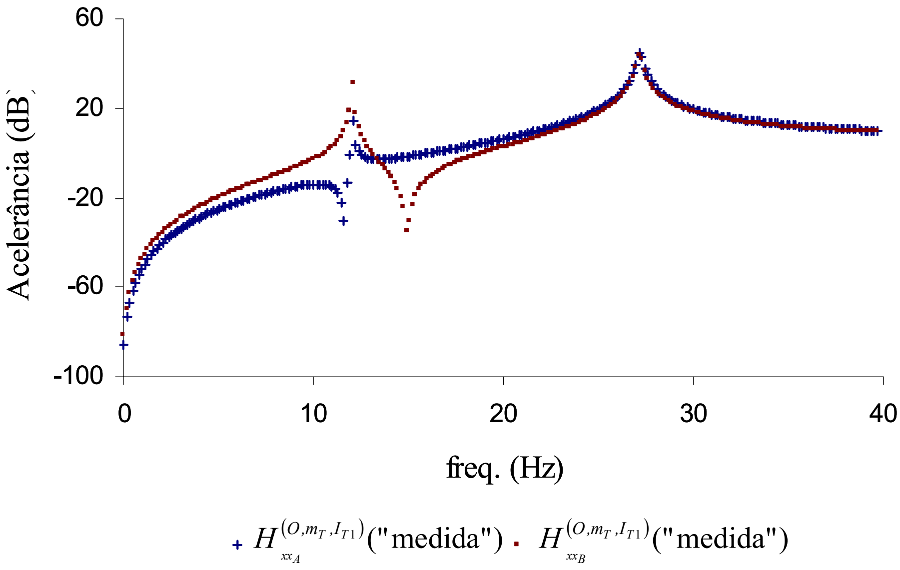


Fig. 3.19 FRF's "medidas experimentalmente" nas coordenadas x_A e x_B para o sistema 'T_1' (dados poluídos com erro aleatório de ±1%).

Estas curvas são também aquelas que foram afectadas de um erro aleatório de ±1%, embora neste caso isso não seja visualmente perceptível. Então como explicar o erro que aparece nos termos transferidos nas coordenadas x e θ? Partindo da expressão (3.56) pode escrever-se:

$$H_{x\theta} = \frac{H_{xx_B} - H_{xx_A}}{2s} \tag{3.68}$$

Nesta equação o numerador é uma diferença entre dois termos que, caso sejam muito próximos, poderão ser da ordem de grandeza do erro, pelo que, nessas circunstâncias, o efeito do ruído será “ampliado”. Portanto, está-se novamente na presença do fenómeno numérico de cancelamento subtractivo. É precisamente isso que as Fig. 3.18 e Fig. 3.19 ilustram. O ruído é mais evidente no segundo modo que no primeiro, o que se deve ao facto dos termos que aparecem no numerador da expressão (3.68) serem muito semelhantes na vizinhança do segundo modo, o que se pode observar na Fig. 3.19. No que diz respeito ao primeiro modo, como os termos que estão envolvidos na diferença citada são muito diferentes, o problema da propagação do erro não o agrava.

Em conclusão, encontraram-se algumas explicações matemáticas que permitem justificar a ocorrência de determinados problemas no método estabelecido, o que indicia que este algoritmo é muito sensível a erros e pode, em determinadas circunstâncias, ser numericamente instável. Do ponto de vista do significado físico das grandezas em jogo, é importante estabelecer claramente quais as suas relações e dependências. O exemplo elaborado, embora goze de alguma simplicidade por utilizar apenas 2 graus de liberdade, permite tirar conclusões muito importantes.

Voltando a discutir o numerador do quociente (3.68), apercebemo-nos que o seu valor tende para zero quando as duas curvas obtidas em coordenadas diferentes x_A e x_B são semelhantes. Isto é equivalente a dizer que para a frequência em que esta situação ocorre não há praticamente rotação; por outras palavras, o ponto de medição corresponde a um ventre de um modo de vibração (neste caso o segundo) num sistema contínuo. Da mesma maneira, à frequência do primeiro modo de vibração, como se está predominantemente em rotação (por razões que foram apontadas anteriormente), o ponto de medição poderá corresponder a um nodo de um modo de flexão num sistema contínuo.

Estes resultados são muito importantes pois podem provocar a imposição de condicionantes que devem ser tomadas em consideração aquando da configuração do procedimento experimental. Ou seja, assim como é universalmente aceite que não se devem ter transdutores de resposta colocados em nodos de vibração quando se pretendem medir translações (pois há modos que poderão ser ocultados), quando se pretende medir rotações há que evitar que esses transdutores estejam sobre ou em torno de (no caso de diferenças finitas) ventres de vibração.

Finalmente, resta prever quais as consequências que um julgamento deficiente dos termos a cancelar podem provocar, nomeadamente, na determinação das massas e momentos de inércia, que neste caso são m_T, I_{T1} e I_{T2}.

No que diz respeito à determinação do valor da massa, é possível fazê-lo com a exactidão necessária desde que se possua uma balança devidamente calibrada e cuja precisão seja suficiente para que a ordem de grandeza da incerteza associada seja muito inferior à do valor da massa. No entanto, a determinação do momento de inércia pode não ser tão rigorosa, principalmente se o objecto adicional que se utiliza tiver uma geometria complexa. Por outro lado, acresce a heterogeneidade do material, embora se suponha que esta situação, a ocorrer, tenha efeitos desprezáveis.

Como não se pretende determinar especificamente quais as consequências que a alteração individual de cada valor pode provocar nos resultados (até porque, em situações reais, poderá não ser possível fazer esta avaliação), considerar-se-á que o valor da massa adicional é exacto, mas que os momentos de inércia são afectados de erros suficientemente elevados para que esses efeitos sobressaiam nas FRF's resultantes. Tomem-se, portanto, $I_{T1} = 5.5 \times 10^{-5}\,\mathrm{kgm}^2$ e $I_{T2} = 0.8 \times 10^{-5}\,\mathrm{kgm}^2$, que correspondem a desvios de $+10\%$ e -20%, respectivamente, dos seus valores reais (considere-se ainda que não há ruído nos sinais). Apresentam-se na Fig. 3.20 as FRF's resultantes para o sistema 'O'.

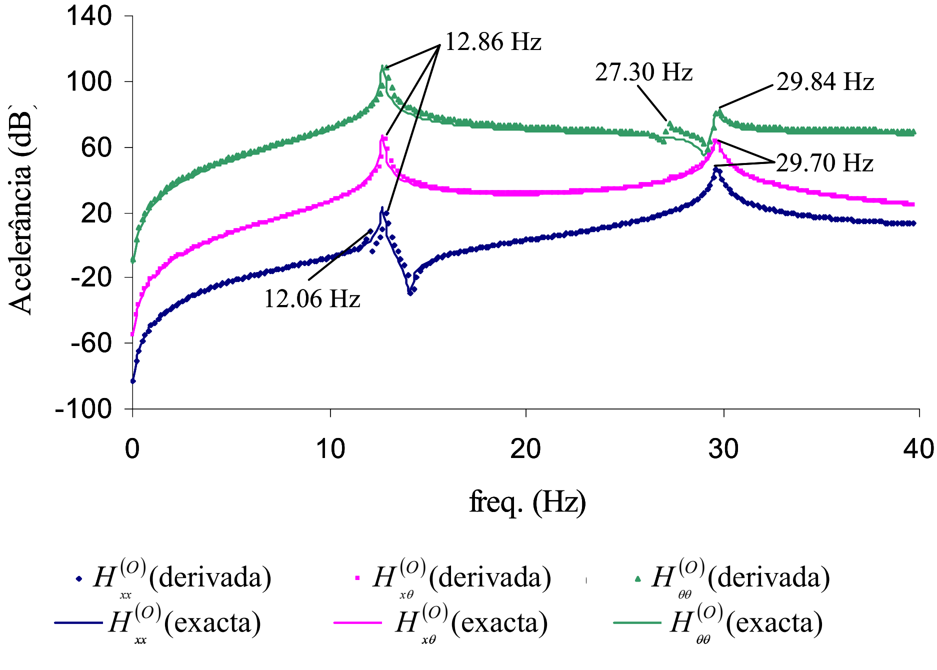


Fig. 3.20 FRF's derivadas e exactas para o sistema 'O' representado na Fig. 3.10 (momentos de inércia I_{T1} e I_{T2} afectados de desvios de +10% e -20%, respectivamente).

Dos resultados obtidos por alterações introduzidas no momento de inércia, salientam-se os seguintes: alteração nos valores das frequências de ressonância e aparecimento de picos espúrios. Em primeiro lugar, há um desvio para a direita na frequência natural associada à primeira ressonância (12.70Hz - Fig. 3.16, pág. 98 - para 12.86Hz), que deverá estar relacionada com o acréscimo de 10% no valor de I_{T1} (note-se que se cancela uma inércia maior, ao que corresponde um aumento no valor da frequência natural). Em segundo lugar, aparecem dois picos espúrios, um à esquerda do primeiro modo na curva $H_{xx}^{(O)}$ a 12.06 Hz e o outro à esquerda do segundo modo na curva $H_{\theta\theta}^{(O)}$ a 27.30 Hz (este segundo, poderia inclusivamente ser, em condições reais, confundido com um modo de vibração). As razões que poderão levar ao aparecimento destes picos poderão estar relacionadas com a diminuição no valor de I_{T2}. É importante notar que as frequências a que aparecem estes picos espúrios são precisamente as mesmas das ressonâncias dos sistemas $O \oplus m_T \oplus I_{T1}$ (Fig. 3.13, pág. 95), para o primeiro pico, e $O \oplus m_T$ (Fig. 3.15, pág. 97), para o segundo pico.

Uma outra observação interessante é que, com este método, o cancelamento não provoca uma deslocação gradual e progressiva em frequência dos modos. De facto, o que parece haver, é uma transferência de um modo a uma determinada frequência para outro a uma frequência mais elevada, i.e., quando se faz um cancelamento incompleto, há modos da curva original que não são totalmente "eliminados" e que por isso aparecem na curva cancelada. Este fenómeno aparece como uma consequência do método em si.

Em conclusão, é pertinente desde já afirmar que este método, embora se apresente como uma via bastante aliciante para o cálculo de termos rotacionais em curvas de mobilidade, tem uma sensibilidade apreciável a erros numéricos que não poderão ser descurados aquando da realização de trabalhos experimentais. Há no entanto outros problemas com bastante relevância, que este exemplo não permite abordar, e que serão avaliados na secção 3.5 por implementação deste procedimento a um caso real, utilizando como estrutura de teste uma viga de secção rectangular.

3.5. APLICAÇÃO EXPERIMENTAL A UMA VIGA

3.5.1. MONTAGENS EXPERIMENTAIS

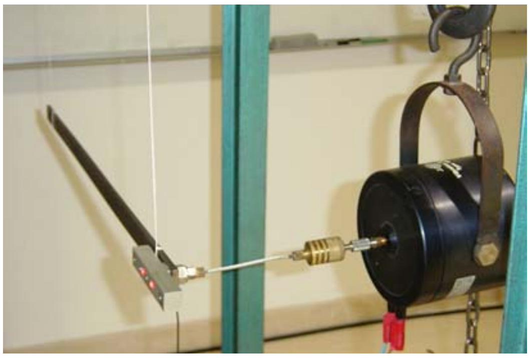


Fig. 3.21 Montagem experimental genérica.

Foi testada uma viga em aço de secção rectangular com dimensões 800.5mm×25.4mm×6.3mm, suspensa por dois fios colocados a uma distância das extremidades de 50mm.

Por forma a implementar os métodos descritos em 3.3.2.1 e 3.3.2.2, utilizou-se um bloco de alumínio em forma de T com uma massa total de 116.83g, com centro colocado a uma distância de 20mm de uma das extremidades da viga. A sua geometria está indicada na Fig. 3.22.

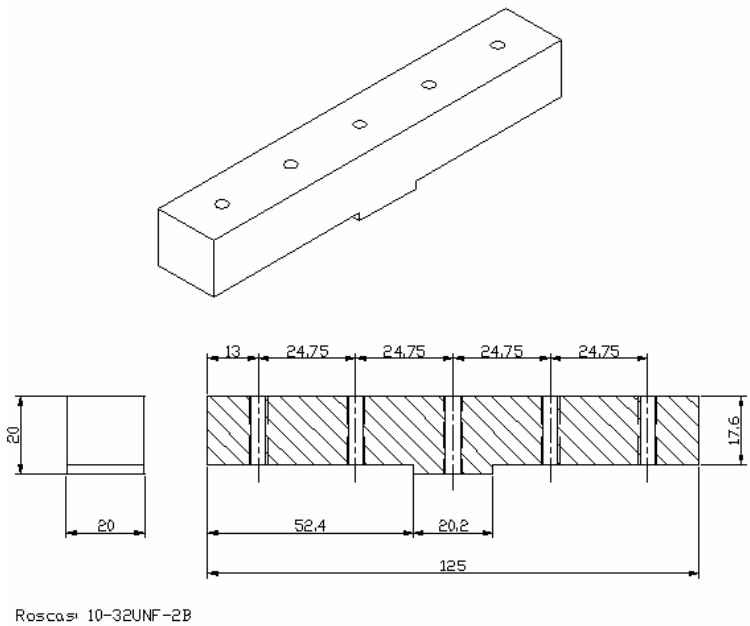


Fig. 3.22 Geometria do bloco de alumínio em forma de T.

A fixação do bloco à estrutura foi feita utilizando um perno totalmente roscado e uma cola termoendurecível, para evitar alguns problemas relacionados com a junta, nomeadamente, o aparecimento de frequências naturais espúrias na gama de frequências em estudo [5].

No que diz respeito ao método descrito em 3.3.2.1 a resposta foi medida directamente na viga em dois pontos distanciados entre si de 35mm com centro no ponto de aplicação do bloco de alumínio em forma de T. Realizou-se um primeiro ensaio com a força aplicada no centro do bloco T e um segundo ensaio em que se fez deslocar o ponto de aplicação da força para um ponto afastado de 49.5mm do seu centro. Apresenta-se na Fig. 3.23 uma fotografia representativa das montagens experimentais realizadas.

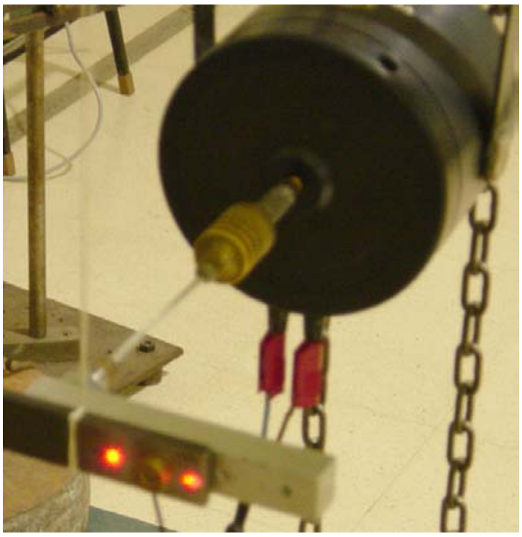
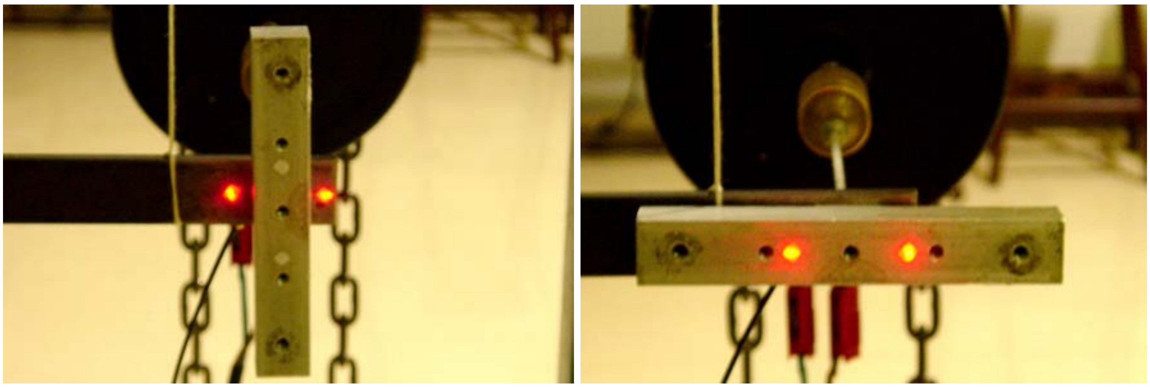


Fig. 3.23 Ensaio experimental com força descentrada realizado para aplicação do método descrito em 3.3.2.1. Os pontos encarnados são a reflexão da luz LASER incidente.

O método descrito na secção 3.3.2.2 utiliza o mesmo bloco em forma de T, mas em vez de se descentrar a força para provocar um momento, roda-se o bloco com vista à alteração do momento de inércia em torno do eixo de rotação à flexão. Neste caso, o transdutor de força está aplicado directamente na viga, e não sobre o bloco. A resposta foi medida em dois pontos distanciados entre si de $2s$=35mm com centro no ponto de aplicação do bloco de alumínio em forma de T.

A concretização experimental deste procedimento, cujo esquema se apresentou na Fig. 3.9 (pág. 88), pode ser observada nas fotografias da Fig. 3.24, em que se tem, à esquerda, o sistema 'T_1' e, à direita, o sistema 'T_2'.



Sistema ‘T_1’ Sistema ‘T_2’

Fig. 3.24 Ensaios experimentais realizados para aplicação do método descrito em 3.3.2.2 (a fotografia da direita corresponde à Fig. 3.21 vista de outro ângulo). Os pontos encarnados são a reflexão da luz LASER incidente.

As principais características mássicas dos elementos externos à viga utilizados em ambos os métodos 3.3.2.1 e 3.3.2.2 apresentam-se na Tabela 3.1.

	Método 3.3.2.1	Método 3.3.2.2
Massa activa do transdutor de força	$19.73g$	
Massa do bloco T	$116.83g$	
Massas adicionais	$9.80g$	$0g$
Momento de Inércia 1 (conjunto formado pelo bloco T + transdutor de força)	$1.815\times10^{-4}\,kg\cdot m^2$	$2.231\times10^{-5}\,kg\cdot m^2$
Momento de Inércia 2 (conjunto formado pelo bloco T + transdutor de força)	$2.336\times10^{-4}\,kg\cdot m^2$	$1.675\times10^{-4}\,kg\cdot m^2$

Tabela 3.1 Características mássicas dos elementos externos à viga utilizados em ambos os métodos 3.3.2.1 e 3.3.2.2.

Todo o equipamento experimental utilizado encontra-se na Tabela A.1 do ANEXO A.

3.5.2. UTILIZAÇÃO DO BLOCO EM FORMA DE T

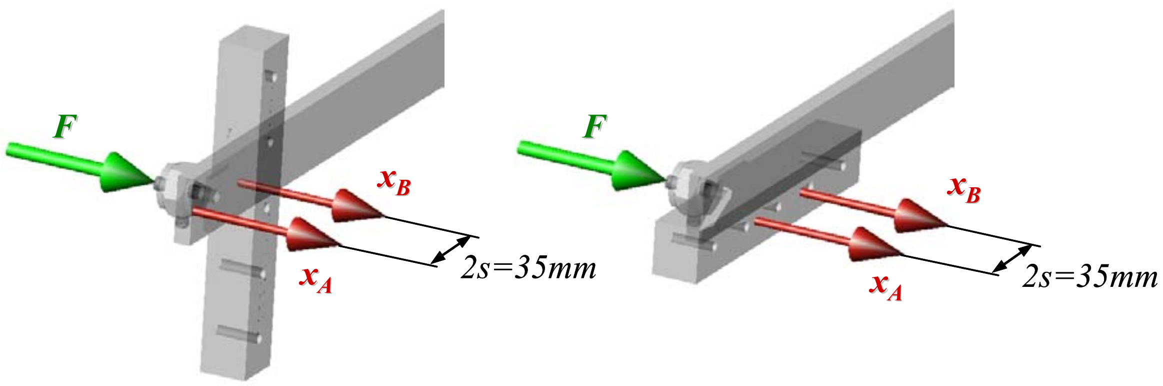
É oportuno fazer alguns comentários relativos à utilização do bloco em forma de T. Como já foi referido por diversas vezes ao longo do texto, este bloco tem três funções distintas, consoante o tipo de montagem executada:

- Proporcionar a aplicação de uma força descentrada, o que tem como consequência a aplicação de um momento e de uma força no ponto de ligação do bloco com a estrutura (caso do método 3.3.2.1, Fig. 3.23);

- Permitir fazer uma alteração no momento de inércia, a qual se consegue rodando o bloco 90º em torno do seu eixo de simetria que é perpendicular à estrutura (caso do método 3.3.2.2, Fig. 3.24);

- Proporcionar a medição de rotações por diferenças finitas (*vide* expressões (3.46), (3.56) ou (3.68));

É em relação a este último ponto que interessa fazer uma breve discussão, já que, como se pode observar nas Fig. 3.23 e Fig. 3.24 (sistema ‘T_1’, à esquerda), nem sempre se utilizou o bloco em forma de T para medir as rotações. No que diz respeito ao método 3.3.2.2, apresenta-se na Fig. 3.25 um esquema em que se ilustra a aplicação da força e as coordenadas de medição das respostas de translação x_A e x_B.



Sistema ‘T_1’ Sistema ‘T_2’

Fig. 3.25 Esquema ilustrativo das coordenadas de aplicação da força e medição das respostas de translação x_A e x_B.

A grande diferença entre medir no bloco T (sistema ‘T_2’) ou medir na estrutura (sistema ‘T_1’) está em que, no primeiro caso, se tem uma medida da tangente do deformada, enquanto que, no segundo caso, se tem uma medida da secante da mesma deformada. Observe-se a Fig. 3.26, em que se apresentam dois esquemas ilustrativos da influência da medição de translações para conversão em rotações (por diferenças finitas) directamente na estrutura ou por recurso ao bloco em forma de T.

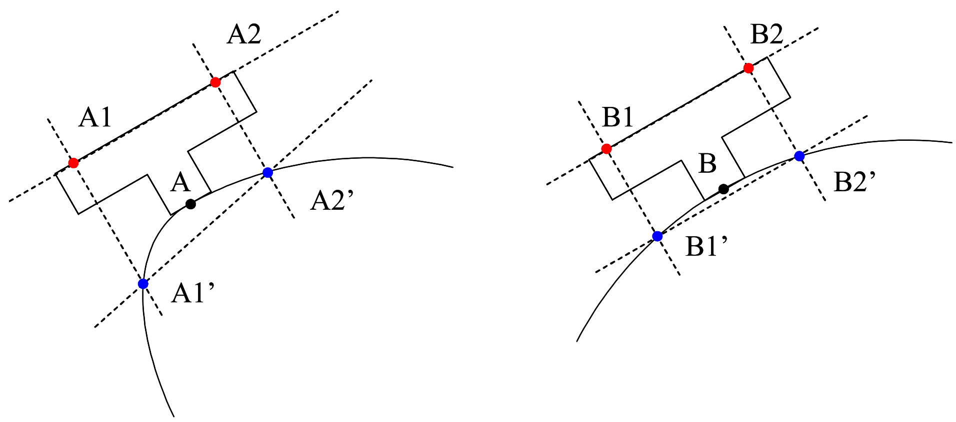


Fig. 3.26 Esquemas ilustrativos da influência da medição de translações para conversão em rotações directamente na estrutura ou por recurso ao bloco em forma de T.

À esquerda, tem-se a representação gráfica de uma deformada hipotética propositadamente exagerada. Neste caso, o que se pode verificar é que, quando se calcula a rotação no ponto *A* utilizando translações medidas em *A1* e *A2*, o resultado será obviamente diferente daquele que se obtém quando se calcula a rotação no ponto *A* utilizando as translações medidas em *A1’* e *A2’*. A razão apontada para haver esta diferença tem que ver com a secante à deformada (recta que passa por *A1’* e *A2’*) não ser paralela à tangente à deformada em *A* (recta que passa por *A1* e *A2*), pelo que, neste caso, o bloco T deve ser utilizado para a medição da rotação no ponto *A*. No entanto, o que se considera para efeitos práticos, são situações semelhantes à representada à direita na mesma figura, em que cada deformada, na vizinhança do ponto em que se pretende medir a rotação, é graficamente semelhante a um único arco. Nesse caso, a tangente (recta que passa por *B1* e *B2*) é praticamente paralela à secante (recta que passa por *B1’* e *B2’*), donde se pode tomar a rotação obtida por *B1’* e *B2’* aproximadamente igual àquela que é obtida por *B1* e *B2*.

3.5.3. MODELOS TEÓRICOS

Como o método experimental utilizado não permite determinar directamente o termo rotacional da FRF $H_{\theta\theta}$ (este tem que ser derivado de acordo com as expressões definidas em 3.3.2.2 e utilizando um procedimento idêntico ao descrito em 3.4), a forma que parece ser mais adequada para se validarem os resultados experimentais consiste em modelar matematicamente o comportamento dinâmico do sistema, seja na forma de um modelo analítico ou por elementos finitos.

A resposta dinâmica nas extremidades de uma viga livre-livre pode ser descrita partindo da equação do movimento de Timoshenko [60], cuja formulação se apresenta no ANEXO B. Como, para além da viga, o sistema experimental inclui o bloco em forma de T que não está localizado exactamente na extremidade livre da viga (o seu centro encontra-se a 20mm da extremidade), aplicou-se o modelo a uma viga mais curta (de 780.5mm de comprimento em vez dos 800.5mm) tendo-se posteriormente procedido ao acoplamento de uma massa rígida de 25g e de um momento de inércia de $1\times10^{-5}\,kg\cdot m^2$ (considerou-se massa pontual) através do método de acoplamento de impedâncias descrito na secção 3.2.2.

Como parâmetros a utilizar na teoria de Timoshenko para descrever a viga, foram definidos os seguintes:

Comprimento	l (mm)	780.5
Largura	b (mm)	25.3
Espessura	h (mm)	6.3
Área da secção transversal	S (mm^2)	159.4
Módulo de Young	E (GPa)	193.5
Módulo de elasticidade transversal	G (GPa)	79.3
Massa específica	ρ (kg/m^3)	7653.2
Coeficientes de amortecimento histerético	η_E	0.0015
	η_G	0.0015
Coeficiente de Poisson	ν	0.29
2º Momento de área	I (mm^4)	527.2
Coeficiente de corte	K	0.849

Tabela 3.2 Características da viga utilizada na teoria de Timoshenko.

Inicialmente, a escolha destes valores teve como base as características de aços de construção comuns que se podem encontrar na maior parte dos manuais de Mecânica de Materiais, tendo sido posteriormente realizados alguns ajustes aos seus valores com vista a obter uma melhor aproximação do modelo teórico àquele que se obteve por via experimental (foram utilizadas como curvas de referência as medidas directamente pelos canais A e B do transdutor LASER, que se podem consultar na secção C.1 do ANEXO C).

3.5.4. RESULTADOS EXPERIMENTAIS

O procedimento experimental descrito, que é equivalente ao modelo numérico elaborado em 3.4, implica o cancelamento de dois momentos de inércia (I_{T2}-I_{T1} e I_{T1}) e de uma massa (m_T). Atendendo à metodologia definida na secção 3.3.2.2, e em particular à expressão

(3.35) (pág. 79), é possível verificar que os cancelamentos podem ser feitos nas seguintes ordens à escolha:

- I_{T2}-I_{T1}, m_T, I_{T1} (ordem adoptada em 3.4);
- I_{T2}-I_{T1}, I_{T1}, m_T;
- m_T, I_{T2}-I_{T1}, I_{T1};

Sem perda de generalidade, e para que se possa estabelecer uma correspondência entre o modelo experimental e o numérico, far-se-á um estudo detalhado do primeiro caso, sendo também abordados os restantes, embora de forma mais simplificada. O motivo pelo qual se considera pertinente apresentar resultados obtidos fazendo o cancelamento por diferentes ordens tem que ver com se ter verificado que há efectivamente uma diferente propagação numérica de erros.

As curvas relativas a estes ensaios e ao subsequente procedimento são apresentadas exaustivamente no ANEXO C. No corpo do texto serão, entretanto, apresentados os exemplos ilustrativos necessários à sua compreensão.

Dos dois ensaios descritos na secção 3.5.1, resultaram dois pares de FRF's nas coordenadas de medição da resposta pelo transdutor LASER: $H_{xx_A}^{(O,m_T,I_{T1})}$, $H_{xx_B}^{(O,m_T,I_{T1})}$, $H_{xx_A}^{(O,m_T,I_{T2})}$ e $H_{xx_B}^{(O,m_T,I_{T2})}$. Na Fig. 3.27 apresentam-se as curvas referentes ao primeiro par juntamente com as previstas no modelo teórico de Timoshenko.

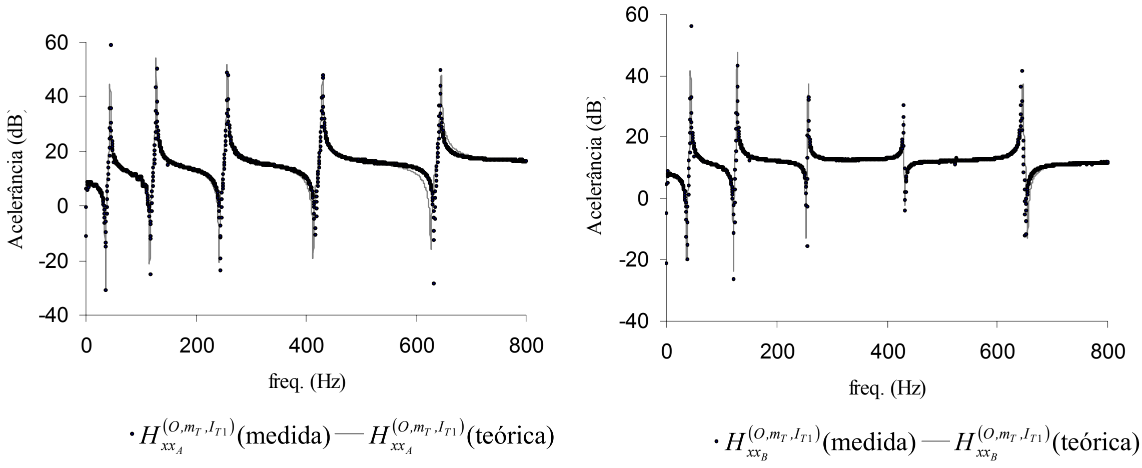


Fig. 3.27 FRF's do sistema 'T_1' nas coordenadas de medição da resposta, x_A (canal A do LASER) e x_B (canal B do LASER).

Fazendo uma análise qualitativa destas figuras, aparentemente os resultados obtidos experimentalmente são bastante aceitáveis, uma vez que o comportamento das curvas medidas acompanha o modelo teórico de Timoshenko estabelecido em 3.5.3 ao longo de todo o domínio[34].

Fazendo a transformação das coordenadas x_A e x_B nas coordenadas x e θ e aplicando o procedimento tal como descrito na secção 3.4, podem-se determinar os termos $H_{\theta\theta}^{(O,m_T,I_{T1})}$ e $H_{\theta\theta}^{(O,m_T,I_{T2})}$ das FRF's dos sistemas 'T_1' e 'T_2', a partir das expressões (3.54) e (3.55) (pág. 90) respectivamente. A partir do conhecimento das FRF's do sistema 'T_1' nas coordenadas de interesse, é possível proceder ao cancelamento da massa do transdutor de força m_T e do momento de inércia residual I_{T1} utilizando a expressão (3.35) sucessivamente em cada cancelamento. Apresentam-se na Fig. 3.28 as FRF's do sistema 'T_1', em que $H_{\theta\theta}^{(O,m_T,I_{T1})}$ é obtido a partir de curvas experimentais.

Só por si, esta figura já permite ilustrar os problemas que advêm ou de ruído existente nos sinais experimentais ou de problemas numéricos, evidenciados pela dispersão de pontos muito acentuada em determinadas zonas da curva $H_{\theta\theta}^{(O,m_T,I_{T1})}$. Esta observação já foi alvo de discussão detalhada na secção 3.4, embora não se tenha feita referência à sua dependência da gama de frequências. Pode verificar-se na Fig. 3.28 que o ruído parece ser tanto mais acentuado quanto mais baixa for a frequência. Duarte e Ewins [58] observaram esta situação para o caso em que se aplicam diferenças finitas, afirmando que o ruído desempenha um papel importante precisamente nas baixas frequências, pelo que é difícil extrair os parâmetros modais nestas regiões.

---

[34] Não há no entanto sobreposição total das curvas, especialmente para frequências mais elevadas. Encontram-se para este facto várias justificações, nomeadamente, o ponto de acoplamento entre o T, transdutor de força e viga não estar exactamente sobre a fibra neutra da viga (o que, como será discutido adiante, poderá provocar acoplamento entre modos de flexão e modos de torção), a viga não ter geometria perfeitamente paralelepipédica nem ser homogénea (são inclusivamente visíveis a olho nu defeitos geométricos) e os parâmetros referentes ao material no modelo teórico (módulo de Young, coeficiente de Poisson, massa específica, etc.) não corresponderem exactamente aos valores reais. Relativamente a este último ponto, tentou-se ajustar o modelo teórico para acertar as ressonâncias.

No entanto, ocorre não somente uma dispersão aleatória de pontos, mas também o aparecimento de picos espúrios; esta questão será, entretanto, discutida mais adiante após identificação modal - secção 3.5.5.

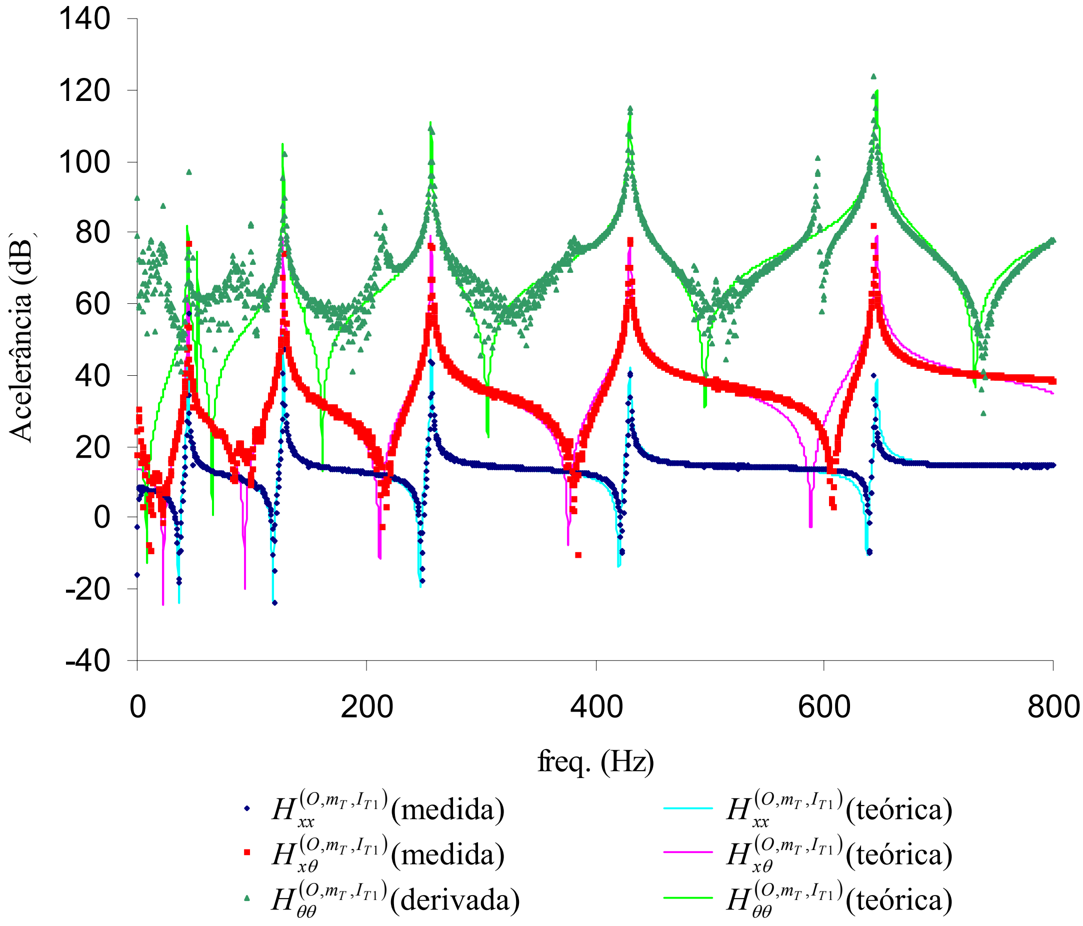


Fig. 3.28 FRF's medidas, teóricas e derivadas para o sistema experimental 'T_1'.

Uma outra questão que se poderá colocar, é a de qual a influência que poderá ter a alteração na ordem dos cancelamentos efectuados. Essa análise foi realizada, tendo-se observado que a única alteração visível acontece quando o primeiro cancelamento realizado corresponde ao cancelamento da massa m_T. Utilizando o mesmo raciocínio que em 3.2.2 e 3.3.2.2, mas agora direccionado para o cancelamento de uma massa em vez de um momento de inércia, sabe-se que o cancelamento de massa m_B dos termos $H_{xx}^{(C)}$ e $H_{x\theta}^{(C)}$ conhecidos de uma matriz de mobilidade genérica são facilmente obtidos através de:

$$H_{xx}^{(A)} = \frac{H_{xx}^{(C)}}{1 - H_{xx}^{(C)} m_B} \tag{3.69}$$

$$H_{x\theta}^{(A)} = \frac{H_{x\theta}^{(C)}}{1 - H_{xx}^{(C)} m_B} \tag{3.70}$$

Ou seja, a expressão (3.54) usada na determinação do termo $H_{\theta\theta}$ poderá passar a ser uma função de FRF's de sistemas cuja massa já tenha sido previamente cancelada, i.e., poder-se-ão obter facilmente $H_{xx}^{(O,I_{T1})}$, $H_{x\theta}^{(O,I_{T1})}, H_{xx}^{(O,I_{T2})}$ e $H_{x\theta}^{(O,I_{T2})}$ a partir das curvas experimentais $H_{xx}^{(O,m_T,I_{T1})}$, $H_{x\theta}^{(O,m_T,I_{T1})}, H_{xx}^{(O,m_T,I_{T2})}$ e $H_{x\theta}^{(O,m_T,I_{T2})}$, e com estas determinar $H_{\theta\theta}^{(O,I_{T1})}$ e $H_{\theta\theta}^{(O,I_{T2})}$ por substituição nas expressões (3.54) e (3.55). Os resultados podem ser consultados na secção C.3 do ANEXO C, onde se pode observar que há uma ligeira diferença nas curvas, embora seja pouco relevante e nada conclusiva, pelo que se omite a sua inclusão no texto.

Porém, estes últimos argumentos sugerem que se pode simplificar o procedimento experimental e de pós-processamento, em que são necessárias, no máximo, duas operações de cancelamento por cada FRF em vez de três[35]. Para isso, basta substituir um dos ensaios anteriores por outro em que se utilize apenas o transdutor de força como objecto a acoplar ao sistema em estudo (neste caso, a viga designada por 'O'). Nestas condições, obtêm-se, experimentalmente, curvas $H_{xx}^{(O,m_F)}$, $H_{x\theta}^{(O,m_F)}, H_{xx}^{(O,m_T,I_T)}$ e $H_{x\theta}^{(O,m_T,I_T)}$ em que m_F é a massa do transdutor de força, m_T é a massa conjunta do bloco T e do transdutor de força e I_T é o momento de inércia do bloco T, que poderá tomar os valores de I_{T1} ou I_{T2}. Recorrendo às expressões (3.69) e (3.70) é possível cancelar m_F no primeiro par de FRF's e m_T no segundo par de FRF's, obtendo-se $H_{xx}^{(O)}$, $H_{x\theta}^{(O)}, H_{xx}^{(O,I_T)}$ e $H_{x\theta}^{(O,I_T)}$, donde, substituindo a segunda e a quarta em (3.54) se chega a $H_{\theta\theta}^{(O)}$. Em resumo, para determinar os termos $H_{xx}^{(O)}$ e $H_{x\theta}^{(O)}$ só é necessário recorrer a uma operação de cancelamento de massa enquanto que para determinar $H_{\theta\theta}^{(O)}$ bastam duas operações de cancelamento, uma de massa e outra do momento de inércia. As curvas obtidas para a estrutura 'O' (viga) por este método apresentam-se na Fig. 3.31.

[35] Esta observação só é válida considerando que o transdutor de força pode ser tratado, em determinadas circunstâncias, como uma massa pontual de momento de inércia desprezável.

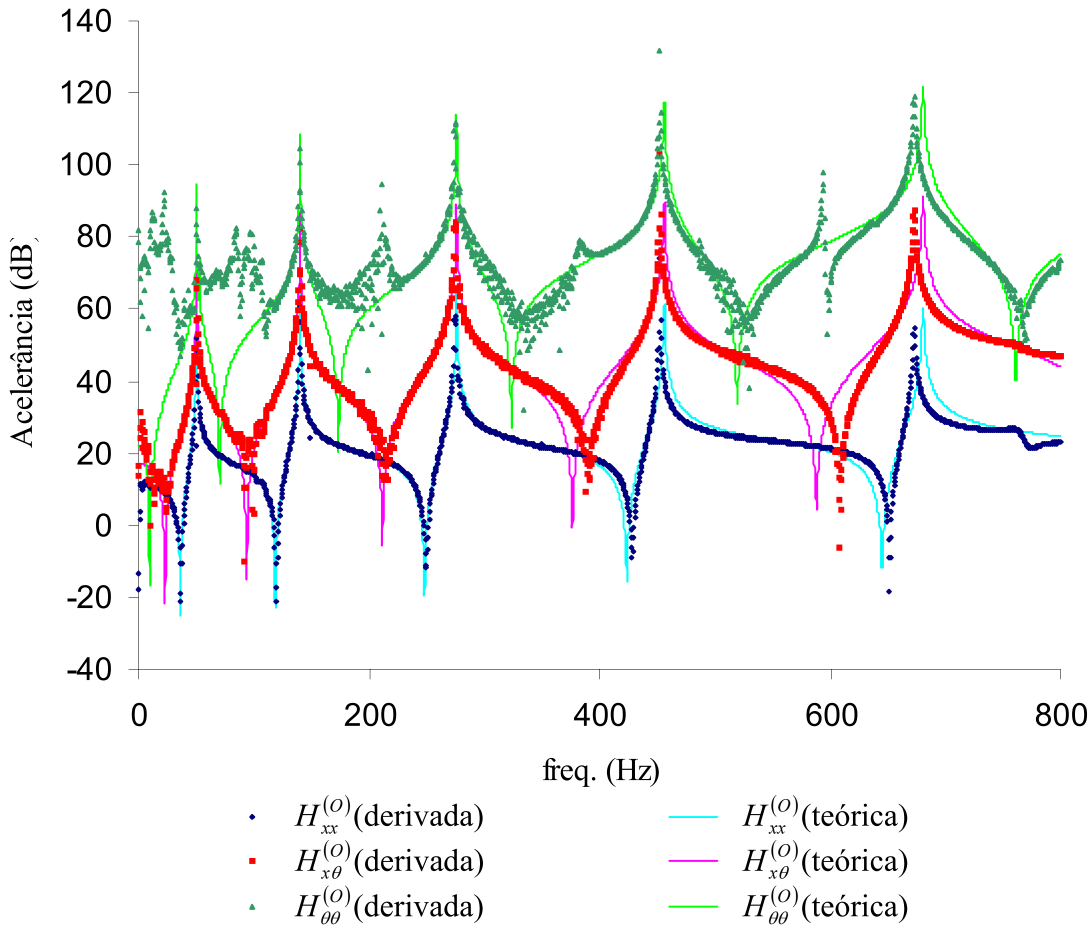


Fig. 3.29 FRF's derivadas e teóricas para o sistema 'O' através do método de cancelamento simplificado.

3.5.5. RESULTADOS OBTIDOS APÓS IDENTIFICAÇÃO MODAL

É legítimo assumir que o ruído evidenciado nas curvas traçadas na secção anterior, poderá ser suprimido, ou pelo menos atenuado, se as FRF's forem identificadas. A metodologia de identificação modal utilizada baseia-se na FRC (Função de Resposta Característica), cuja formulação de base se disponibiliza na secção 3.1.4.

Como caso de estudo, recorrer-se-á novamente às estruturas designadas de 'T_1' e 'T_2', começando por se fazer o cancelamento na ordem inicial (I_{T2}-I_{T1}, m_T, I_{T1}). Embora na secção anterior se tenha demonstrado que basta utilizar uma destas estruturas em vez de ambas, tendo como vantagem simplificar numa operação matemática de cancelamento todo o procedimento, as razões que levaram a fazer esta opção têm fundamentalmente que ver com a repetibilidade do processo experimental. Note-se que, a única diferença geométrica entre as estruturas ‘T_1’ e ‘T_2’ consiste na rotação de 90º do bloco de alumínio em forma de T, correspondendo a apenas uma modificação estrutural (definida por uma diferença no momento de inércia), ao passo que as estruturas utilizadas no cancelamento simplificado têm ainda massas diferentes e alterações evidentes na rigidez local, que não foram quantificadas.

A identificação modal incidiu nos termos H_{xx} e $H_{x\theta}$ obtidos experimentalmente das estruturas ‘T_1’ e ‘T_2’. Embora Duarte e Ewins [58] aconselhem a que a identificação modal seja feita directamente nas FRF’s de translação medidas (H_{xx_A} e H_{xx_B}), o procedimento de identificação modal baseado na FRC deve ser feito havendo pelo menos uma curva directa [11], o que significa que, no presente caso, se terão efectivamente de utilizar os termos H_{xx} e $H_{x\theta}$. Acrescente-se, no entanto, que as curvas obtidas por identificação modal a partir de H_{xx} e $H_{x\theta}$ têm bom aspecto, o que sugere que a identificação foi bem sucedida.

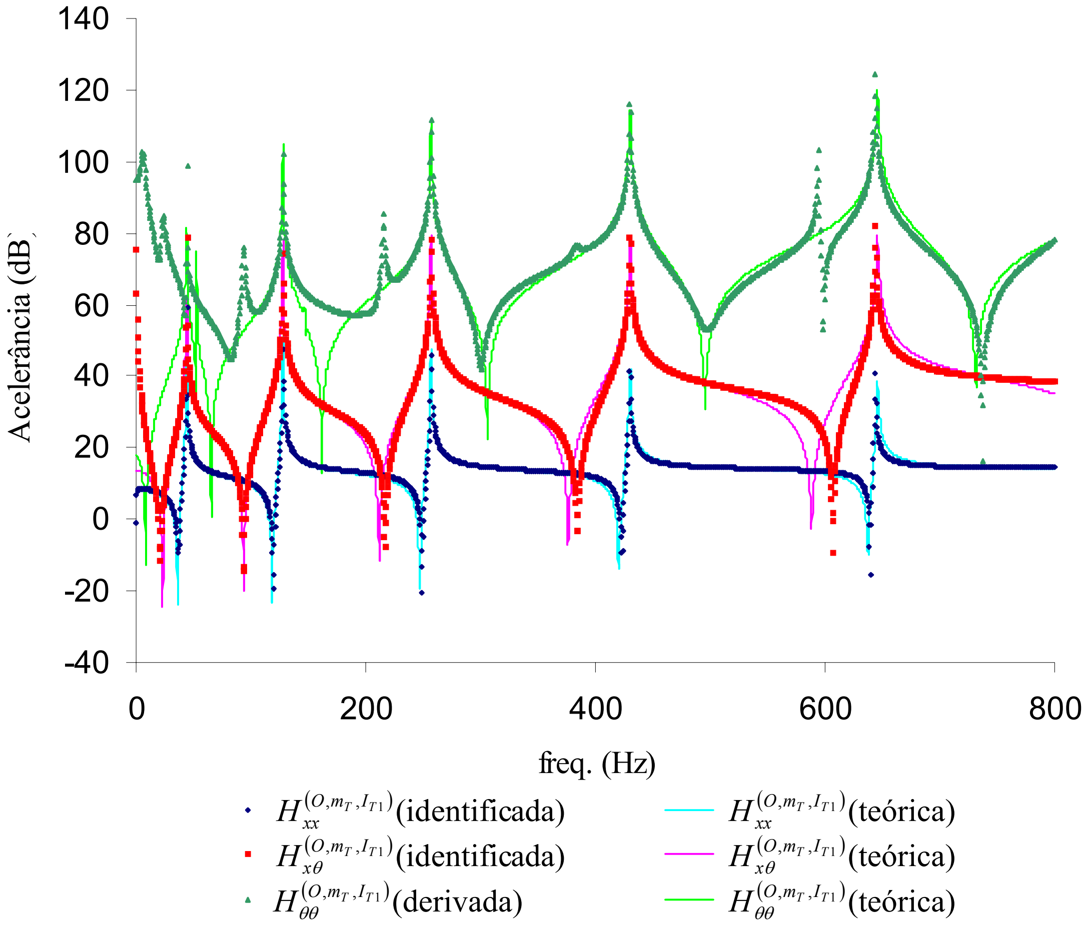


Fig. 3.30 FRF’s identificadas, teóricas e derivadas para o sistema experimental ‘T_1’.

Procedendo ao cancelamento na ordem I_{T2}-I_{T1}, m_T, I_{T1} obtêm-se as FRF's que se podem consultar na secção D.1 do ANEXO D (e que se podem comparar com as curvas não identificadas apresentadas na secção C.2 do ANEXO C), apresentando-se na Fig. 3.30 da presente secção as FRF's determinadas após identificação modal para o sistema 'T_1'.

3.5.5.1. APRECIAÇÃO GLOBAL DOS RESULTADOS

Comparando a Fig. 3.30 com a Fig. 3.28 apresentada na secção anterior (3.5.4), constata-se que o processo de identificação modal elimina de forma eficaz a dispersão de pontos que se assemelha a ruído no termo $H_{\theta\theta}$ e que terá como origem problemas numéricos associados à expressão (3.54) (devidamente identificados e discutidos na secção 3.4). No entanto, permaneceram picos espúrios e desapareceram anti-ressonâncias, que, atendendo à análise qualitativa dos termos H_{xx} e $H_{x\theta}$ conhecidos e das curvas teóricas, não seriam de prever.

Dado que a determinação do termo $H_{\theta\theta}$ depende exclusivamente das funções $H_{x\theta}$ das estruturas 'T_1' e 'T_2' (também depende do valor do momento de inércia, que é constante e cujo erro na sua determinação se supõe suficientemente baixo para não provocar o aparecimento de picos tão relevantes; questão abordada na secção 3.4), é de prever que a origem de picos espúrios e o desaparecimento de algumas anti-ressonâncias possam estar directamente relacionados com a determinação experimental dos termos $H_{x\theta}$. Apresenta-se na Fig. 3.31 o termo $H_{\theta\theta}^{(O,m_T,I_{T1})}$ calculado da estrutura 'T_1' juntamente com os termos $H_{x\theta}^{(O,m_T,I_{T1})}$ e $H_{x\theta}^{(O,m_T,I_{T2})}$ envolvidos no seu cálculo (*vide* expressão (3.54) da pág. 90).

Em primeiro lugar, a observação geral desta figura sugere que os picos espúrios de $H_{\theta\theta}^{(O,m_T,I_{T1})}$ podem estar relacionados com as anti-ressonâncias de $H_{x\theta}^{(O,m_T,I_{T2})}$, atendendo a que estes se dão à mesma frequência. Esta observação será exaustivamente discutida na secção seguinte (3.5.5.2).

Em segundo lugar, observa-se que desapareceram anti-ressonâncias de $H_{\theta\theta}^{(O,m_T,I_{T1})}$ nos modos mais baixos, o que é bem patente abaixo dos 300Hz (*vide* também Fig. 3.30). Nesta região é também bem visível que $H_{x\theta}^{(O,m_T,I_{T1})}$ e $H_{x\theta}^{(O,m_T,I_{T2})}$ são muito semelhantes, o que pode conduzir a um problema numérico de cancelamento subtractivo na expressão (3.54), situação esta já abordada na secção 3.4.

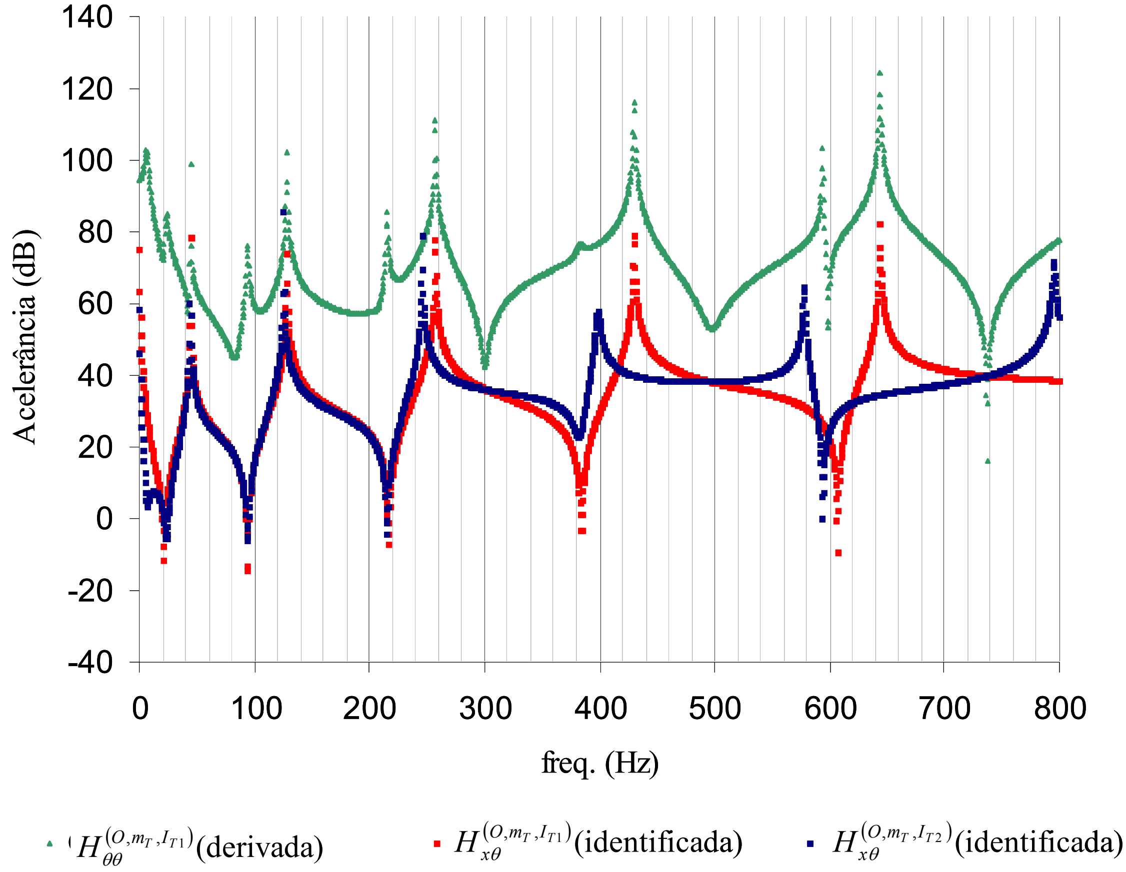


Fig. 3.31 Termo $H_{\theta\theta}^{(O,m_T,I_{T1})}$ calculado da estrutura ‘T_1’ juntamente com os termos $H_{x\theta}^{(O,m_T,I_{T1})}$ e $H_{x\theta}^{(O,m_T,I_{T2})}$ envolvidos no seu cálculo (*vide* expressão (3.54)).

3.5.5.2. DISCUSSÃO EM TORNO DA ORIGEM DE PICOS ESPÚRIOS

Para que se possa compreender o mecanismo de formação das ressonâncias e picos espúrios de $H_{\theta\theta}^{(O,m_T,I_{T1})}$, construiu-se a Tabela 3.3 onde figuram os máximos e mínimos locais das funções em estudo apresentadas na Fig. 3.31. Recorrendo a um código de cores, tentou-se realçar a relação entre os máximos locais de $H_{\theta\theta}^{(O,m_T,I_{T1})}$ e os máximos ou mínimos locais de $H_{x\theta}^{(O,m_T,I_{T1})}$ e $H_{x\theta}^{(O,m_T,I_{T2})}$, em que a cor verde representa aqueles que se pensa corresponder a ressonâncias e a cor encarnada representa aqueles que se pensa corresponder a picos espúrios.

$H_{\theta\theta}^{(O,m_T,I_{T1})}$		$H_{x\theta}^{(O,m_T,I_{T1})}$		$H_{x\theta}^{(O,m_T,I_{T2})}$	
MAX	MIN	MAX	MIN	MAX	MIN
	20.0				
			21.0		
23.5					23.5
	43.0				
				44.0	
44.5		44.5			
	82.5				
94.0			94.0		94.0
	105.0				
				125.5	
128.5		128.5			
	191.0				
215.5					215.5
			217.0		
	225.0				
				246.0	
257.5		257.5			
	300.5				
					382.0
383.5					
			384.5		
				399.0	
430.0		430.0			
	497.5				
				578.0	
594.0					594.0
	599.0				
			607.0		
644.0		644.0			
	737.0				
				795.0	

Tabela 3.3 Máximos e mínimos locais das FRF's representadas na Fig. 3.31 (valores em Hz).

O que este código de cores revela, é que há uma estreita relação entre os máximos locais de $H_{\theta\theta}^{(O,m_T,I_{T1})}$ e os máximos e mínimos locais de $H_{x\theta}^{(O,m_T,I_{T1})}$ e $H_{x\theta}^{(O,m_T,I_{T2})}$ respectivamente. Mais concretamente, relembrando a expressão (3.67):

$$H_{\theta\theta}^{(0,m_T,I_{T1})} = \frac{1}{I_{T2}-I_{T1}}\left(\frac{H_{x\theta}^{(0,m_T,I_{T1})}}{H_{x\theta}^{(0,m_T,I_{T2})}}-1\right) \tag{3.67}$$

a observação desta tabela permite dizer que $H_{\theta\theta}^{(O,m_T,I_{T1})}$ apresenta:

- Uma ressonância quando o numerador dentro do parêntesis na expressão (3.67) toma um valor muito elevado, i.e., quando $H_{x\theta}^{(O,m_T,I_{T1})}$ tem uma ressonância;

- Um pico espúrio quando o denominador dentro do parêntesis da expressão (3.67) toma um valor muito pequeno, i.e., quando $H_{x\theta}^{(O,m_T,I_{T2})}$ tem uma anti-ressonância.

No que diz respeito ao primeiro ponto, esse resultado parece fazer todo o sentido. No entanto, o segundo ponto carece de justificação, já que esta é uma situação que não era de prever do ponto de vista do modelo teórico. Para se tentar encontrar uma explicação plausível para este fenómeno, observe-se a Fig. 3.32 em que se apresentam as curvas teóricas modeladas pela teoria de Timoshenko correspondentes às curvas representadas na Fig. 3.31.

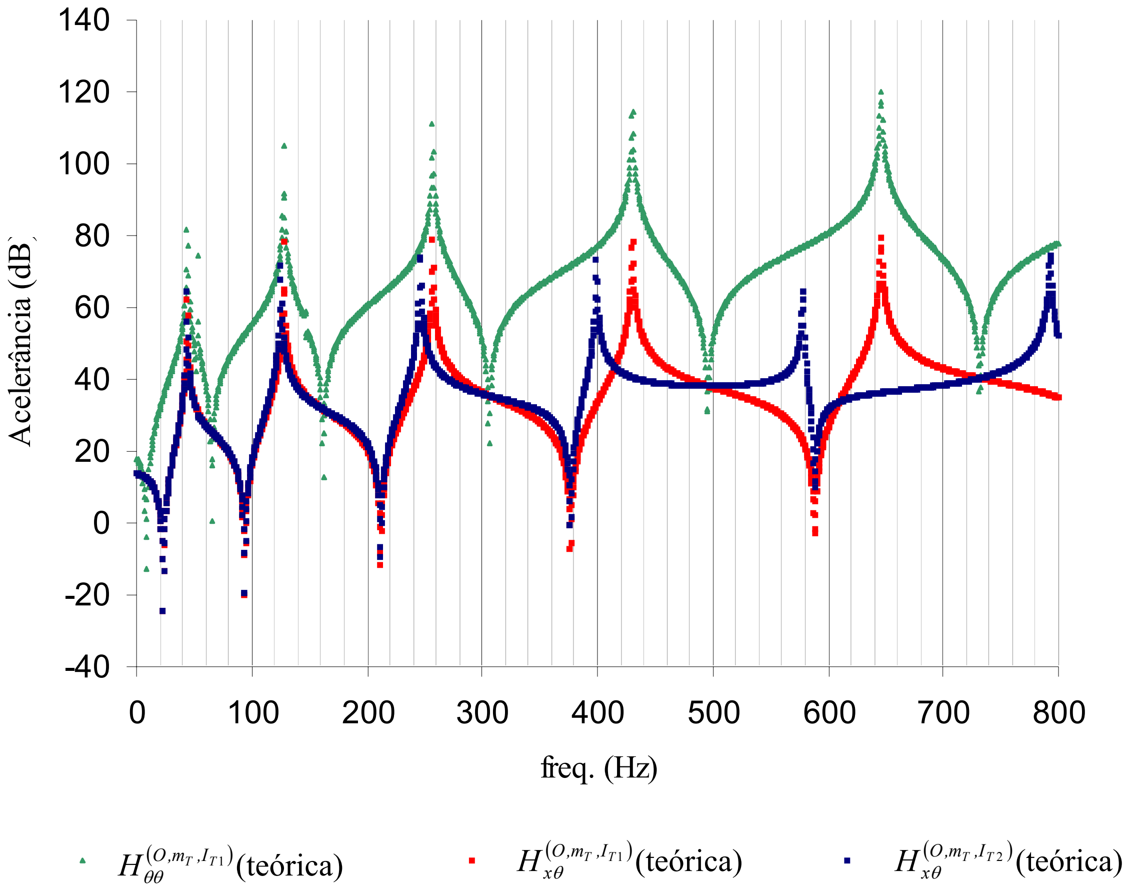


Fig. 3.32 Termo $H_{\theta\theta}^{(O,m_T,I_{T1})}$ teórico da estrutura 'T$_1$' juntamente com os termos $H_{x\theta}^{(O,m_T,I_{T1})}$ e $H_{x\theta}^{(O,m_T,I_{T2})}$ teóricos envolvidos no seu cálculo (*vide* expressão (3.54))..

Comparando ambas as figuras, e em especial os termos $H_{x\theta}^{(O,m_T,I_{T1})}$ e $H_{x\theta}^{(O,m_T,I_{T2})}$, há algumas regiões que se destacam, nomeadamente entre os 580 e os 620 Hz. Enquanto que no modelo teórico as anti-ressonâncias se dão à mesma frequência (embora tenham amplitudes diferentes), o mesmo não acontece com os resultados experimentais obtidos após identificação modal. Há uma explicação interessante que parece justificar o que está a acontecer.

Na secção 3.2.3 discutem-se os efeitos de alterações na massa a nível das características locais do sistema. Em referência ao modelo experimental utilizado, uma alteração no momento de inércia corresponde a uma alteração na coordenada θ, assim como uma alteração na massa corresponde a uma alteração na coordenada x. Em relação às FRF's e a nível das características locais, significa que quando se altera apenas o momento de inércia, as frequências das anti-ressonâncias dos termos $H_{x\theta}$ e $H_{\theta\theta}$ não sofrem alterações, enquanto que no termo H_{xx} se passa o contrário. De modo análogo, alterando a massa do sistema, são as anti-ressonâncias dos termos H_{xx} e $H_{x\theta}$ que não sofrem alterações, enquanto que no termo $H_{\theta\theta}$ essas alterações serão visíveis.

O que é importante reter é que, em qualquer dos casos, as anti-ressonâncias do termo $H_{x\theta}$ não deveriam sofrer desvios. Contudo, é evidente que não foi isso que se verificou experimentalmente. Pensa-se que a origem deste desvio tem que ver essencialmente com o bloco rígido em forma de T e o transdutor de força não estarem acoplados à viga exactamente sobre a sua fibra neutra. Nesse caso, está a excitar-se um modo de torção, ou seja, passa a haver uma coordenada de rotação γ, em torno da direcção longitudinal da viga y, que não foi considerada mas cuja importância passa a ser relevante. A matriz de receptância passaria a ter mais uma linha e mais uma coluna, ficando com o seguinte aspecto:

$$[\alpha]=\begin{bmatrix}\alpha_{xx} & \alpha_{x\theta} & \alpha_{x\gamma}\\ \alpha_{\theta x} & \alpha_{\theta\theta} & \alpha_{\theta\gamma}\\ \alpha_{\gamma x} & \alpha_{\gamma\theta} & \alpha_{\gamma\gamma}\end{bmatrix}$$

em que $\alpha_{\gamma\theta}=\alpha_{\theta\gamma}$ deveriam ser nulos atendendo a que, numa viga, não há acoplamento entre modos de flexão e de torção. Note-se que, quando se roda o bloco em forma de T, o momento de inércia muda não só em torno do eixo dos *xx* mas também em torno do eixo dos *yy*. Ora, um dos momentos de inércia está associado à coordenada θ enquanto que o outro está associado à coordenada γ, mas, da maneira como foi conduzido o ensaio, em que se rodou simplesmente o T, a alteração do momento de inércia numa coordenada implicou a alteração implícita do momento de inércia na outra direcção. Analogamente à abordagem realizada em 3.2.3, referindo-nos às expressões (3.37) a (3.41) (pág. 81) da mesma secção, e fazendo corresponder às coordenadas 1, 2 e 3 as coordenadas x, θ e γ respectivamente, sabe-se que uma alteração na coordenada γ implica alterações nos frequências das anti-ressonâncias μ_{xx}, $\mu_{x\theta}$, $\mu_{\theta x}$ e $\mu_{\theta\theta}$ (*vide* expressões (3.37),(3.38) e (3.40)). Como quando se alterou o momento de inércia em torno do eixo dos *xx* se alterou inevitavelmente o momento de inércia em torno do eixo dos *yy*, esta é uma explicação possível para justificar as alterações verificadas nos valores das frequências das anti-ressonâncias dos termos $H_{x\theta}^{(O,m_T,I_{T1})}$ e $H_{x\theta}^{(O,m_T,I_{T2})}$ representados na Fig. 3.31. Porque não se mediu $H_{x\gamma}$, torna-se impraticável corrigir as frequências das anti-ressonâncias de $H_{x\theta}^{(O,m_T,I_{T2})}$. Este ponto, aliás, será um dos propostos para futuros desenvolvimentos.

Para que se torne consistente a ideia de que o desfasamento entre as frequências das anti-ressonâncias de $H_{x\theta}^{(O,m_T,I_{T1})}$ e $H_{x\theta}^{(O,m_T,I_{T2})}$ é uma causa provável do aparecimento dos picos espúrios, experimentou-se corrigir as anti-ressonâncias de $H_{x\theta}^{(O,m_T,I_{T2})}$ utilizando para isso os residuais mássico e rígido de acordo com o procedimento descrito na secção 3.1.3 (note-se que, a identificação modal efectuada conforme o método descrito na secção 3.1.4 permite determinar os termos que aparecem na expressão (3.14) (pág. 69), nomeadamente frequências, amortecimentos e constantes modais).

Esta operação consistiu em determinar os residuais mássico e rígido necessários para corrigir $H_{x\theta}^{(O,m_T,I_{T2})}$, impondo, em sucessivos intervalos de interesse, que as suas anti-ressonâncias coincidissem com as anti-ressonâncias de $H_{x\theta}^{(O,m_T,I_{T1})}$ e de modo a que $H_{\theta\theta}^{(O,m_T,I_{T1})}$ tivesse anti-ressonâncias nos seus mínimos locais (utilizando para isso o mecanismo de formação de anti-ressonâncias tal como explicado em 3.1.2). Os resultados que se obtiveram apresentam-se na Fig. 3.33.

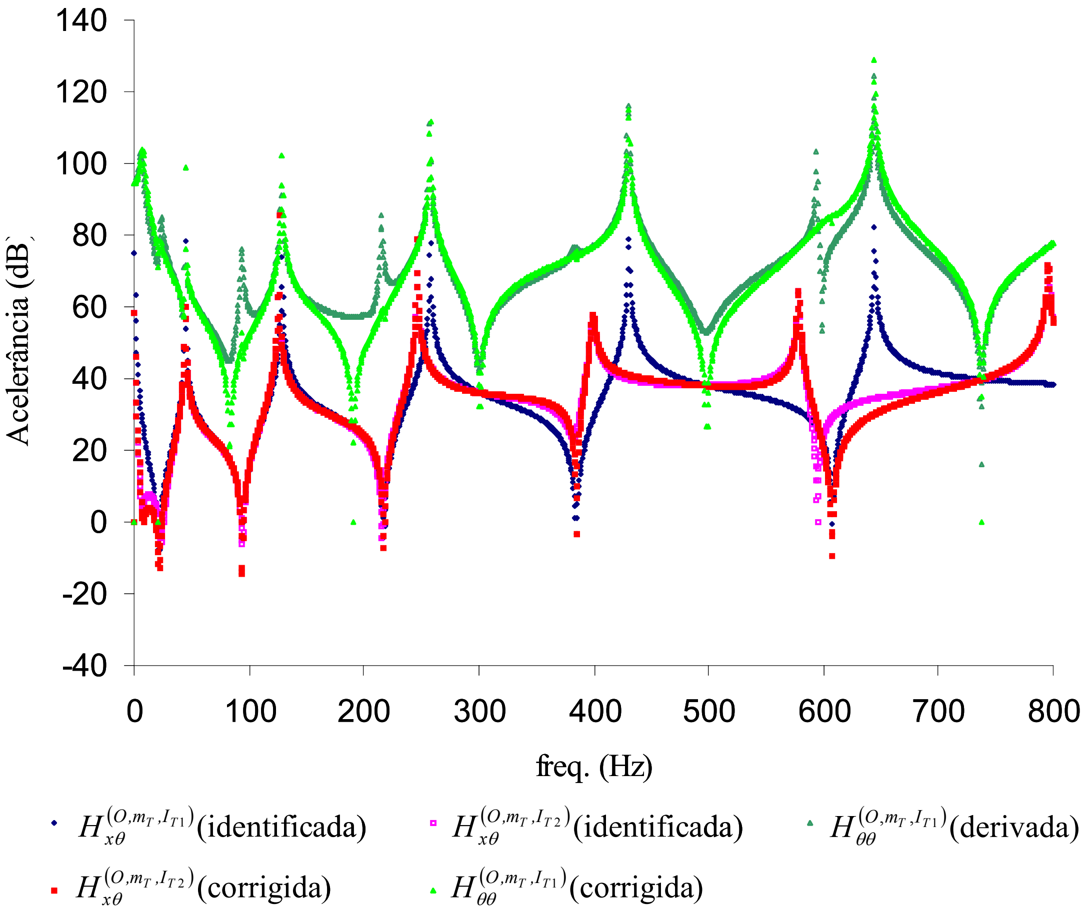


Fig. 3.33 Termos $H_{\theta\theta}^{(O,m_T,I_{T1})}$ e $H_{x\theta}^{(O,m_T,I_{T1})}$ corrigidos por via do recurso aos residuais mássico e rígido juntamente com os termos originais representados na Fig. 3.31.

É importante notar que, as curvas corrigidas não podem ser utilizadas como características da resposta dinâmica do sistema em questão, principalmente porque as anti-ressonâncias de $H_{\theta\theta}^{(O,m_T,I_{T1})}$ corrigido são fictícias atendendo ao critério que se utilizou para a sua imposição, o que é tanto mais visível para frequências abaixo dos 250 Hz. Ressalva-se no entanto a utilidade desta abordagem na discussão dos problemas associados ao método em análise, já que se conseguiu demonstrar que os picos espúrios devem o seu aparecimento, em grande parte, à deslocação das anti-ressonâncias entre duas curvas que se suporiam, dentro das considerações iniciais tomadas, permanecer na mesma posição.

De um outro ponto de vista, uma questão que poderá ser interessante colocar é se a tentativa de eliminar os picos espúrios não será uma tentativa para eliminar não apenas a influência de modos de torção mas até mesmo os próprios modos, i.e., até que ponto esses picos não são de facto ressonâncias de modos de torção? Uma primeira abordagem a esta situação pode partir da análise da fase de, por exemplo, $H_{\theta\theta}^{(O,m_T,I_{T1})}$, a qual se pode observar (juntamente com o seu módulo) na Fig. 3.34.

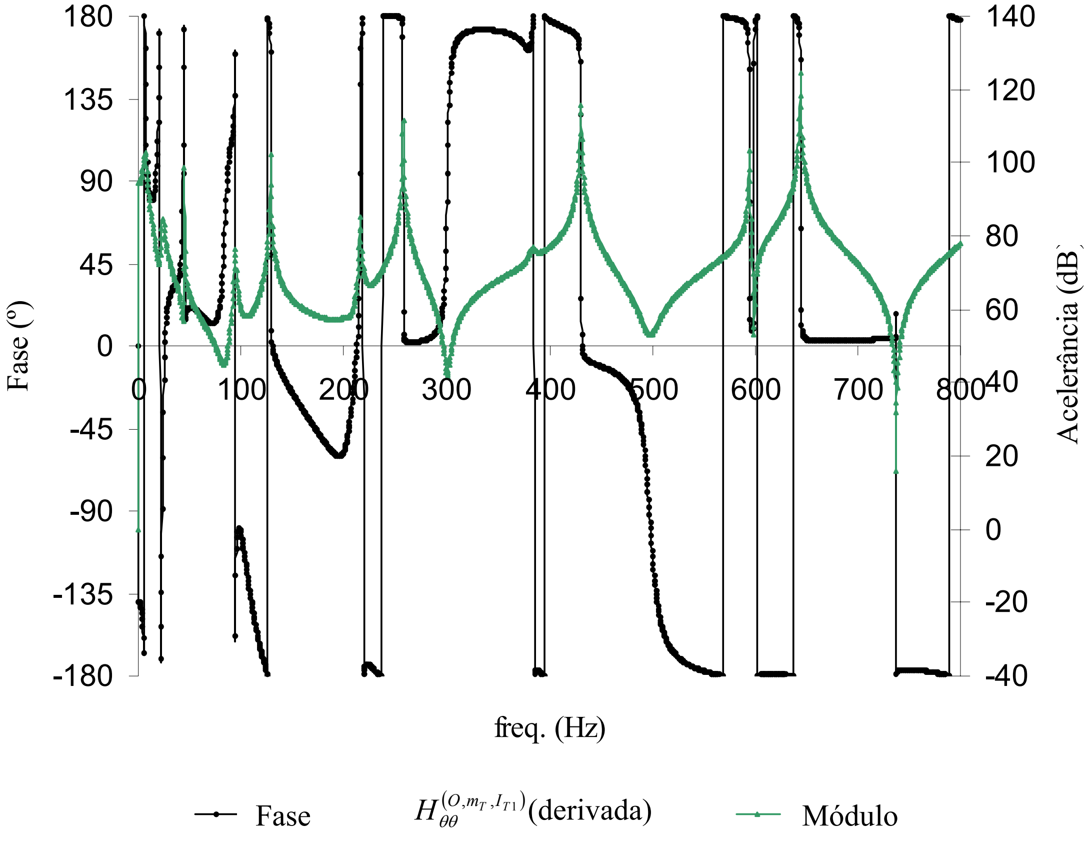


Fig. 3.34 Módulo e fase de $H_{\theta\theta}^{(O,m_T,I_{T1})}$.

Infelizmente, a evolução da fase de $H_{\theta\theta}^{(O,m_T,I_{T1})}$, pelo menos até aos 200 Hz, tem um aspecto que torna muito difícil elaborar comentários bem sustentados. Contudo, a partir desta frequência, a apreciação geral do comportamento da fase visualizada na Fig. 3.34, parece corroborar a possibilidade de os picos espúrios serem efectivamente ressonâncias de modos de torção.

3.5.6. COMPARAÇÃO ENTRE OS MÉTODOS DAS SECÇÕES 3.3.2.1 E 3.3.2.2

Deixou-se para o final deste capítulo a discussão entre os métodos descritos nas secções 3.3.2.1 e 3.3.2.2, pois torna-se mais fácil fazê-lo conhecendo de antemão os problemas associados à utilização de ambos os métodos. O segundo método, desenvolvido neste trabalho, foi amplamente discutido nas secções anteriores. No que diz respeito ao primeiro, este é bem conhecido pela comunidade cientifica, podendo-se encontrar a sua discussão e aplicação em diversos trabalhos na área.

Apresenta-se na Fig. 3.35 a sobreposição das respostas dinâmicas calculadas para a viga (sistema 'O') através de ambos os métodos[36], utilizando como dados iniciais FRF's geradas por identificação modal com base em resultados experimentais.

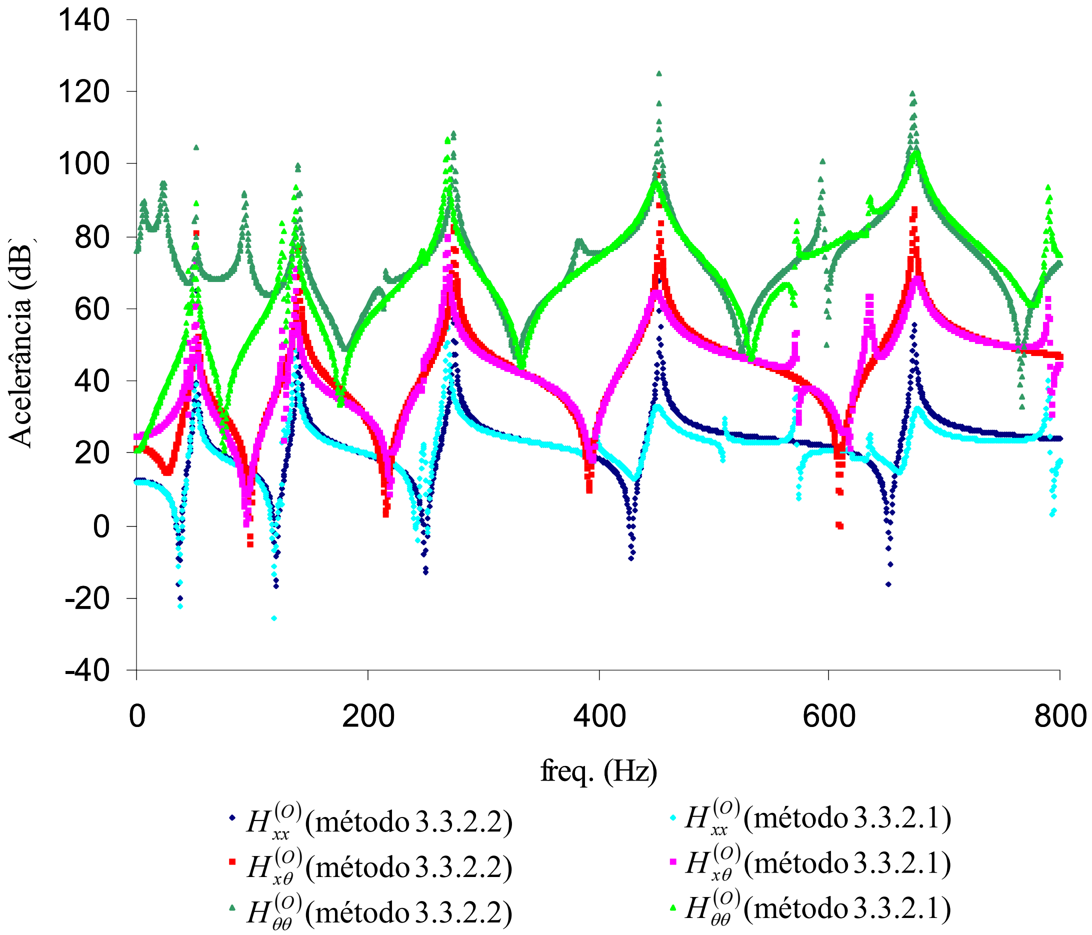


Fig. 3.35 FRF's calculadas para o sistema 'O' dos métodos de cancelamento descritos nas secções 3.3.2.1 e 3.3.2.2.

A análise anterior suscita os seguintes comentários:

- Quanto aos termos H_{xx} e $H_{x\theta}$:

[36] Foi utilizada a versão simplificada do método 3.3.2.2, de acordo com o descrito na secção 3.5.4.

- É claramente preferível adoptar o método descrito em 3.3.2.2 para determinar os termos H_{xx} e $H_{x\theta}$. Este resultado poderá ser consequência imediata do procedimento experimental físico em si, nomeadamente no que diz respeito a alguns problemas originados pela aplicação de uma força descentrada no T e que foram discutidos no início da secção 3.3.2.2;

- Quanto ao termo $H_{\theta\theta}$:

- Por um lado, há vantagens em determinar $H_{\theta\theta}$ pelo método descrito em 3.3.2.2, no caso de se pretender evidenciar as ressonâncias; por outro lado, algumas anti-ressonâncias parecem estar mais bem definidas quando determinadas através do método descrito em 3.3.2.1;

- Aparentemente, os resultados obtidos pelo método descrito em 3.3.2.2 são piores que os obtidos pelo descrito em 3.3.2.1 nas baixas frequências, mas a tendência parece inverter-se à medida que a frequência aumenta. Não tendo sido explorado este aspecto, deixa-se o comentário e omite-se a interpretação;

- Finalmente, verificou-se que o método descrito em 3.3.2.1 parece ser mais sensível a alterações nos valores da massa e momento de inércia a cancelar[37] do que o método descrito em 3.3.2.2.

[37] Os valores que se utilizaram nos cancelamentos foram sujeitos a um factor de correcção que permitiu ajustar as curvas determinadas pelo método descrito em 3.3.2.1 às curvas determinadas pelo método descrito em 3.3.2.2. Optou-se por não se introduzir essa demonstração neste trabalho, atendendo a que, em situações reais, poderá não ser possível ter curvas de referência que permitam executar os ajustamentos estabelecidos.

4. CONCLUSÕES

«Finis coronat opus»

«O fim coroa a obra» - Ovídio, Heroid. 2, 85

4.1. CONTRIBUIÇÕES DO PRESENTE TRABALHO

Foi estudado do ponto de vista numérico e experimental um método, baseado em técnicas de acoplamento, que permite estimar FRF's rotacionais sem que seja necessário aplicar um momento no ponto de medição ou recorrer a excitadores de momentos. Um bloco em forma de T, que se assumiu como tendo comportamento rígido na gama de frequências de interesse, foi o dispositivo que se utilizou para provocar uma modificação estrutural caracterizada por uma alteração no momento de inércia do sistema, fazendo-o rodar 90º em torno de um dos seus eixos de simetria. Recorrendo a diferenças finitas, mediram-se as respostas sem contacto físico através de um transdutor LASER, tendo sido previamente explorados a sua utilização, desempenho metrológico e limitações.

Embora o método abordado não seja totalmente inovador por ser semelhante ao explorado do ponto de vista teórico em [36], este trabalho vem contribuir para a melhor compreensão dos problemas associados a essa técnica derivado do facto de utilizar uma metodologia mais sistematizada baseada em [39].

Como principais conclusões, apontam-se as seguintes:

- A medição de rotações por diferenças finitas não deve ser feita em ventres de vibração, assim como a medição de translações não deve ser feita em nodos, com o perigo de haver propagação acentuada de erros (por cancelamento subtractivo) ou omissão de modos importantes;

- A ordem do desacoplamento não parece ser relevante, embora um menor número de operações pareça conduzir a resultados mais satisfatórios uma vez que aparecem menos picos espúrios nas FRF's rotacionais $(H_{\theta\theta})$;

- Este método é muito sensível à montagem experimental, que poderá ter como consequência provocar um deslocamento indesejado das anti-ressonâncias dos termos $(H_{x\theta})$. Isto reflecte-se ao nível da FRF rotacional $(H_{\theta\theta})$ pelo aparecimento de picos espúrios. Têm-se pelo menos duas hipóteses para corrigir esta situação: ou se garante que o ponto de acoplamento entre o bloco e a estrutura está exactamente sobre a fibra neutra para que não haja excitação de modos indesejados (no caso de uma viga) ou então têm que se envidar esforços no sentido de incorporar esses modos no modelo utilizado (seja recorrendo a outras técnicas experimentais ou a técnicas de acoplamento). A segunda solução parece ser, para estruturas mais complexas, a alternativa adequada;

- A identificação dos parâmetros modais é primordial na resolução do problema do ruído mas não é suficiente para eliminar os picos espúrios nem para evidenciar anti-ressonâncias que desapareceram nas FRF's rotacionais $(H_{\theta\theta})$.

- A utilização dos residuais para a correcção das FRF's rotacionais mostrou que o reposicionamento das anti-ressonâncias permite eliminar praticamente os picos espúrios;

4.2. SUGESTÕES PARA TRABALHO FUTURO

Na linha do trabalho aqui desenvolvido, muito mais se pode fazer, já que, se os problemas não foram solucionados, foram pelo menos melhor compreendidos, abrindo-se novas perspectivas para abordagens futuras.

Assim, propõe-se que, como próximo passo a implementar num futuro eventual trabalho de investigação desta técnica, sejam fabricados novos dispositivos que tenham, no plano da viga, um momento de inércia idêntico em torno de um dos eixos. Estes dispositivos poderão ser o típico bloco em forma de T e, por exemplo, um bloco em forma de X ou em forma de I. O facto dos blocos terem massas diferentes não apresenta problema, pois o cancelamento da massa é "trivial" tal como foi oportunamente demonstrado. Este problema está já a ser abordado no seguimento do presente trabalho, esperando-se alguns resultados para breve.

No seguimento do parágrafo anterior, será um caso a explorar verificar se o aparecimento de picos espúrios não corresponde na realidade a ressonâncias de torção que, provocando deslocamentos em algumas anti-ressonâncias dos termos $H_{x\theta}$, o algoritmo vem a revelar no desacoplamento.

No que diz respeito à sua aplicação a outros tipos de estruturas, seria desejável começar por explorar uma placa em que possa haver acoplamento entre modos de flexão. A ideia é introduzir mais uma coordenada de rotação no mesmo ponto de medição. Desta abordagem, o autor espera ainda desenvolver um algoritmo matemático, baseado nas características muito particulares de uma placa quadrada ou circular, que permita corrigir alguns problemas, por exemplo o do aparecimento de picos espúrios, por técnicas de acoplamento.

Uma outra questão que não foi abordada neste trabalho foi a do número de pontos de medição, que se pretende, não se limite a apenas um. Deste modo será possível avaliar a eficácia deste método na estimativa de FRF's em locais afastados, que, em muitas situações reais, são de difícil ou até impossível acesso.

No entanto, para a utilização prática dos algoritmos baseados na expressão de calculo da FRF rotacional $(H_{\theta\theta})$ aqui proposta, é necessário resolver os problemas numéricos encontrados. Conforme ficou patente, o ruído que poluí as curvas obtidas experimentalmente desencadeia um processo de instabilidade numérica que é essencial resolver ou contornar antes que as técnicas possam ser aplicadas com sucesso a casos reais. Como uma das causas fundamentais para estes erros parece estar relacionada com a utilização das diferenças finitas (quando se está perto de um ventre), poderia ser vantajoso aplicar algoritmos de optimização para a escolha de pontos de medição, nomeadamente pelo método da Redução de Guyan, podendo essa optimização ser estendida à escolha do ponto de aplicação da força, nomeadamente pelo método EIDV[38] [61]. A distância escolhida nas diferenças finitas também poderá ser relevante, como constatam Duarte e Ewins em [58].

[38] O acrónimo inglês EIDV é utilizado para descrever *Effective Independence Distribution Vector*.

Em paralelo ao trabalho a desenvolver sugerido nos pontos anteriores, poder-se-á adoptar uma abordagem semelhante mas em que o bloco em forma de T seja flexível. Normalmente, porque o bloco em forma de T é considerado infinitamente rígido, a medição das respostas rotacionais é mal condicionada, sendo necessário adoptar técnicas matemáticas de regularização das equações [40].

ANEXO A EQUIPAMENTO EXPERIMENTAL

No âmbito deste trabalho foram realizados vários conjuntos de ensaios com configurações diversas, tendo sido utilizado o equipamento que se descrimina na Tabela A.1[39].

Equipamento	Marca – Modelo	Observações	Ensaio
Computador PC	Solbi	Intel Pentium III 933 MHz 256 Mb RAM Windows 2000 da Microsoft	Todos
Módulo de aquisição de sinal	Brüel & Kjær - 3109	4/2 canais I/O	Todos
Módulo de interface LAN	Brüel & Kjær - 7533	-	Todos
Programa de aquisição e processamento de sinal	Brüel & Kjær - PULSE Labshop	versão 6.1.5.65	Todos
Excitador electromagnético	Brüel & Kjær - 4808 (ref.1617606)	-	2.3.1 e 2.3.2
	Brüel & Kjær - 4809 (ref.1003975)	-	2.3.3 a 2.3.8 e 3.5
Amplificador de sinal	Brüel & Kjær - 2712	-	2.3.1 e 2.3.2
	Brüel & Kjær - 2706	-	2.3.3 a 2.3.8 e 3.5
Transdutor de força	Brüel & Kjær - 8200 (ref.784099)	sensibilidade: 3.85 pC/N	Todos
Tirante para transmissão da força à estrutura	Tirante 1	Aço comum	2.3.7
	Tirante 2	Aço temperado (esbelto)	2.3.7
	Tirante 3	Cabo de estendal (flexível)	2.3.4 a 2.3.8 e 3.5
Amplificador de carga para transdutor de força	Brüel & Kjær - 2635	-	Todos
Transdutores de resposta (acelerómetros piezoeléctricos)	Brüel & Kjær - Deltatron 4507 (ref.2054330)	sensibilidade: 9.88 $\frac{mV}{m/s^2}$	2.3.1 a 2.3.3

[39] A coluna da direita indica em que ensaios é que determinado equipamento foi utilizado através da referência ao número das secções correspondentes.

Equipamento	**Marca – Modelo**	**Observações**	**Ensaio**
	Brüel & Kjær - Deltatron 4508B (ref.10006)	sensibilidade: $10.09\ \frac{mV}{m/s^2}$	2.3.2
Transdutor de resposta (velocímetro LASER)	Polytec - OFV 2802i - (ref.1980029)	sensibilidade: $8\ \frac{V}{m/s}$	Todos
	Polytec - OFV 508 - (ref.1980028)		
Fita retroreflectora	3M - Scotchlite Diamond Grade 983-10 (ref.104 R-00821)	-	Todos
Cola	HBM – Schnellklebstoff X60	-	Todos
Tripé	Gitzo	-	Todos
Estrutura de Teste	-	Bloco em Aço	2.3.3
	-	Viga em Aço grande	2.3.4 a 2.3.7
	-	Viga em Aço pequena	2.3.8 e 3.5

Tabela A.1 Equipamento utilizado nos ensaios experimentais.

ANEXO B RECEPTÂNCIAS NAS EXTREMIDADES DE VIGAS - TEORIA DE TIMOSHENKO

A vibração transversal de uma viga livre-livre, considerando um elemento de comprimento ∂x, pode ser descrita pela equação diferencial do movimento ou equação de Timoshenko [60]:

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - \rho \cdot \left(\frac{1}{G \cdot K} + \frac{1}{E} \right) \cdot \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \cdot \partial t^2} + \frac{\rho \cdot S}{E \cdot I} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\rho^2}{E \cdot K \cdot G} \cdot \frac{\partial^4 y}{\partial t^4} = 0 \qquad \text{(B.1)}$$

em que *y* representa a deflexão, ρ é a massa específica, *S* é a área da secção transversal, *E* é o módulo de Young ou módulo de elasticidade longitudinal do material, *G* é o módulo de elasticidade transversal, *I* é o segundo momento de área da secção transversal em torno do eixo neutro que passa pelo seu centróide e *K* é uma constante, designada de coeficiente de corte, que depende da geometria da secção transversal [62]. Para o caso de uma viga de secção rectangular tem-se:

$$K = \frac{10(1+\nu)}{12+11\nu} \qquad \text{(B.2)}$$

Substituindo em (B.1) a solução harmónica:

$$y = Y \cdot e^{i\omega t} \qquad \text{(B.3)}$$

obtém-se:

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \omega^2 \cdot \rho \cdot \left(\frac{1}{G \cdot K} + \frac{1}{E} \right) \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \left(\frac{\omega^4 \cdot \rho^2}{E \cdot K \cdot G} - \frac{\omega^2 \cdot \rho \cdot S}{E \cdot I} \right) \cdot y = 0 \qquad \text{(B.4)}$$

cuja solução é:

$$y = A \cdot cos(\alpha \cdot x) + B \cdot sen(\alpha \cdot x) + C \cdot cosh(\beta \cdot x) + D \cdot senh(\beta \cdot x) \qquad \text{(B.5)}$$

em que *A*, *B*, *C* e *D* são constantes dependentes das condições fronteira do problema e:

$$\alpha^2 = \frac{\omega^2 \cdot \rho}{2} \cdot \left(\frac{1}{G \cdot K} + \frac{1}{E} \right) + \frac{\varepsilon_1}{2} \tag{B.6}$$

$$\beta^2 = -\frac{\omega^2 \cdot \rho}{2} \cdot \left(\frac{1}{G \cdot K} + \frac{1}{E} \right) + \frac{\varepsilon_1}{2} \tag{B.7}$$

com:

$$\varepsilon_1^2 = \omega^4 \cdot \rho^2 \cdot \left(\frac{1}{G \cdot K} - \frac{1}{E} \right)^2 + \frac{4 \cdot \omega^2 \cdot \rho \cdot S}{E \cdot I} \tag{B.8}$$

Partindo destas equações, em [60] faz-se a dedução das FRF's na extremidade de uma viga, considerando as coordenadas representadas na Fig. B.1.

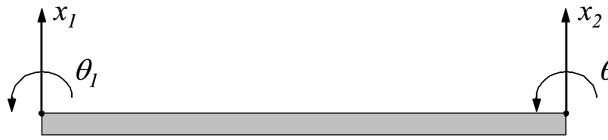


Fig. B.1 Representação das coordenadas nas extremidades de uma viga livre-livre.

$$\alpha_{x_1x_1} = \alpha_{x_2x_2} = \frac{\left(\frac{\beta}{\gamma_1^2} + \frac{1}{\alpha \cdot \varepsilon_2} \right) \cdot G_8 - \left(\frac{\alpha}{\gamma_2^2} + \frac{1}{\beta \cdot \varepsilon_2} \right) \cdot G_9}{\Delta \cdot E \cdot I} \tag{B.9}$$

$$\alpha_{x_1\theta_1} = \alpha_{\theta_1x_1} = -\alpha_{x_2\theta_2} = -\alpha_{\theta_2x_2} = \frac{\left(\frac{1}{\gamma_2} - \frac{1}{\gamma_1} \right) \cdot G_{13} + \left(\frac{\alpha}{\beta \cdot \gamma_2} + \frac{\beta}{\alpha \cdot \gamma_1} \right) \cdot G_{12}}{\Delta \cdot E \cdot I} \tag{B.10}$$

$$\alpha_{x_1x_2} = \alpha_{x_2x_1} = \frac{\left(\frac{\beta}{\gamma_1^2} + \frac{1}{\alpha \cdot \varepsilon_2} \right) \cdot G_{10} - \left(\frac{\alpha}{\gamma_2^2} + \frac{1}{\beta \cdot \varepsilon_2} \right) \cdot G_{11}}{\Delta \cdot E \cdot I} \tag{B.11}$$

$$\alpha_{x_1\theta_2} = \alpha_{\theta_2x_1} = -\alpha_{x_2\theta_1} = -\alpha_{\theta_1x_2} = \frac{\left(\frac{1}{\gamma_2} - \frac{1}{\gamma_1} \right) \cdot G_{14}}{\Delta \cdot E \cdot I} \tag{B.12}$$

$$\alpha_{\theta_1\theta_1} = \alpha_{\theta_2\theta_2} = \frac{-\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{\gamma_2}{\alpha \cdot \gamma_1} \right) \cdot G_9 - \left(\frac{1}{\beta} + \frac{\gamma_1}{\beta \cdot \gamma_2} \right) \cdot G_8}{\Delta \cdot E \cdot I} \tag{B.13}$$

$$\alpha_{\theta_1\theta_2} = \alpha_{\theta_2\theta_1} = \frac{-\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{\gamma_2}{\alpha \cdot \gamma_1}\right) \cdot G_{11} - \left(\frac{1}{\beta} + \frac{\gamma_1}{\beta \cdot \gamma_2}\right) \cdot G_{10}}{\Delta \cdot E \cdot I} \tag{B.14}$$

em que:

$$\gamma_1 = \alpha^2 - \frac{\omega^2 \cdot \rho}{G \cdot K} \tag{B.15}$$

$$\gamma_1 = \beta^2 + \frac{\omega^2 \cdot \rho}{G \cdot K} \tag{B.16}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\gamma_1 \cdot \gamma_2}{\alpha \cdot \beta} \tag{B.17}$$

$$G_8 = cos(\alpha \cdot l) \cdot senh(\beta \cdot l) \tag{B.18}$$

$$G_9 = sen(\alpha \cdot l) \cdot \cos h(\beta \cdot l) \tag{B.19}$$

$$G_{10} = senh(\beta \cdot l) \tag{B.20}$$

$$G_{11} = sen(\beta \cdot l) \tag{B.21}$$

$$G_{12} = sen(\alpha \cdot l) \cdot senh(\beta \cdot l) \tag{B.22}$$

$$G_{13} = cos(\alpha \cdot l) \cdot cosh(\beta \cdot l) - 1 \tag{B.23}$$

$$G_{14} = cos(\alpha \cdot l) - cosh(\beta \cdot l) \tag{B.24}$$

Finalmente, resta referir que, introduzindo amortecimento histerético, tanto para flexão como para tracção, os módulos de Young e de elasticidade transversal podem ser substituídos pelos módulos complexos:

$$E^* = E \cdot (1 + i\eta_E) \tag{B.25}$$

$$G^* = G \cdot (1 + i\eta_G) \tag{B.26}$$

em que η_E e η_G representam os coeficientes de amortecimento histerético. Pode assumir-se que estes coeficientes têm o mesmo valor, o que é uma boa aproximação no caso de polímeros ou elastómeros, podendo também ser feita no caso de materiais metálicos como o aço [60], devido à dificuldade de se justificar outra opção.

ANEXO C   RESULTADOS EXPERIMENTAIS

C.1   FRF'S MEDIDAS ATRAVÉS DO TRANSDUTOR LASER

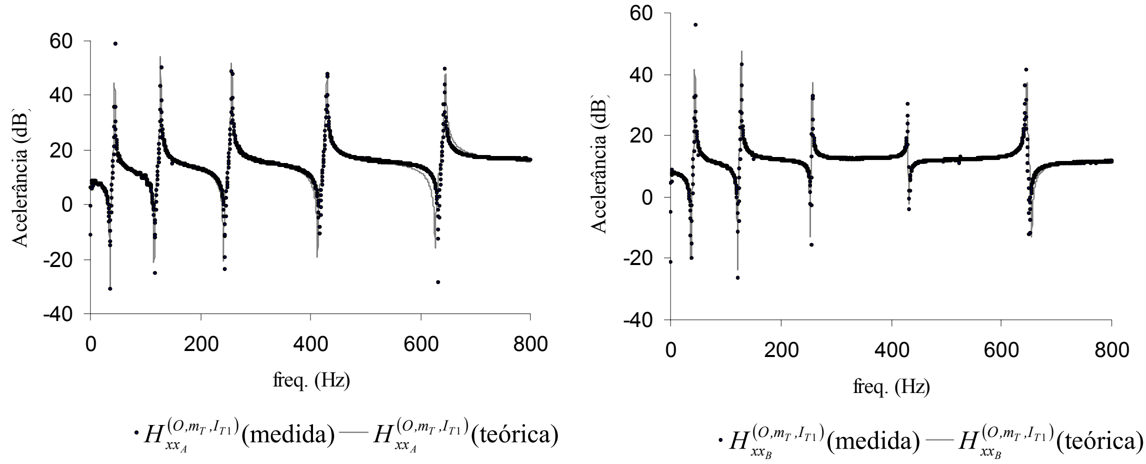


Fig. C.1 FRF's do sistema 'T_1' nas coordenadas de medição da resposta, x_A (canal A do LASER) e x_B (canal B do LASER).

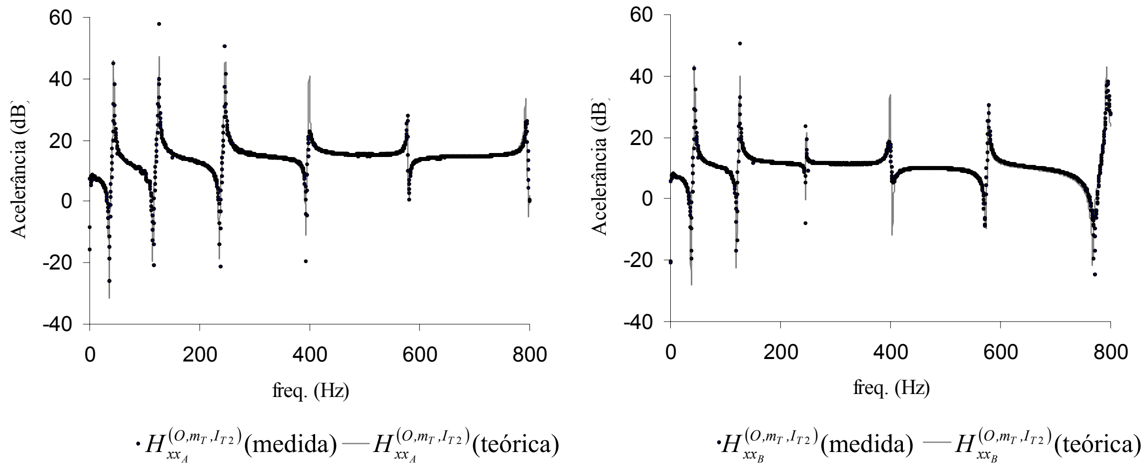


Fig. C.2 FRF's do sistema 'T_2' nas coordenadas de medição da resposta, x_A (canal A do LASER) e x_B (canal B do LASER).

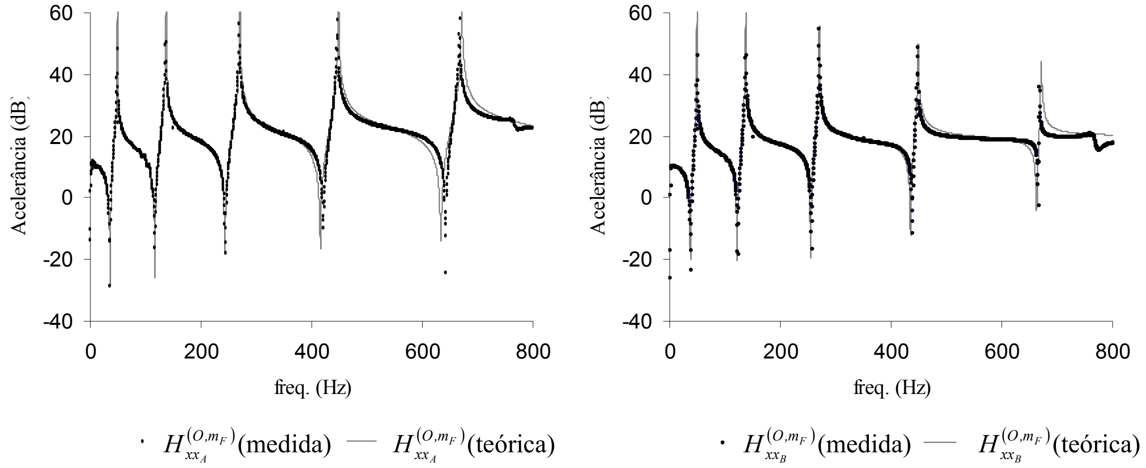


Fig. C.3 FRF's do sistema $O \oplus m_F$ nas coordenadas de medição da resposta, x_A (canal A do LASER) e x_B (canal B do LASER).

C.2 CANCELAMENTO NA ORDEM I_{T2}-I_{T1}, m_T, I_{T1}

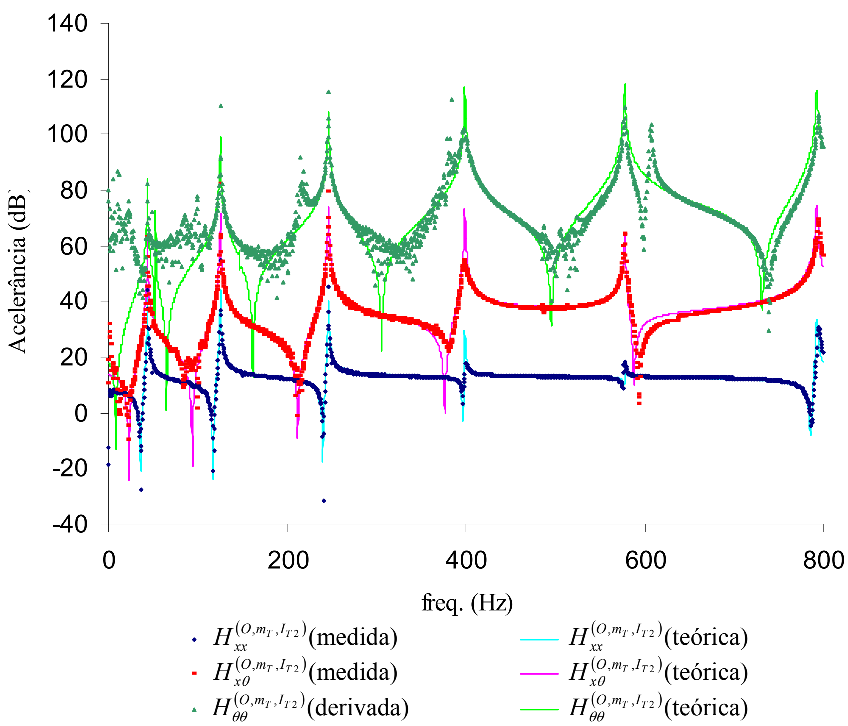


Fig. C.4 FRF's medidas, teóricas e derivadas para o sistema experimental 'T_2'.

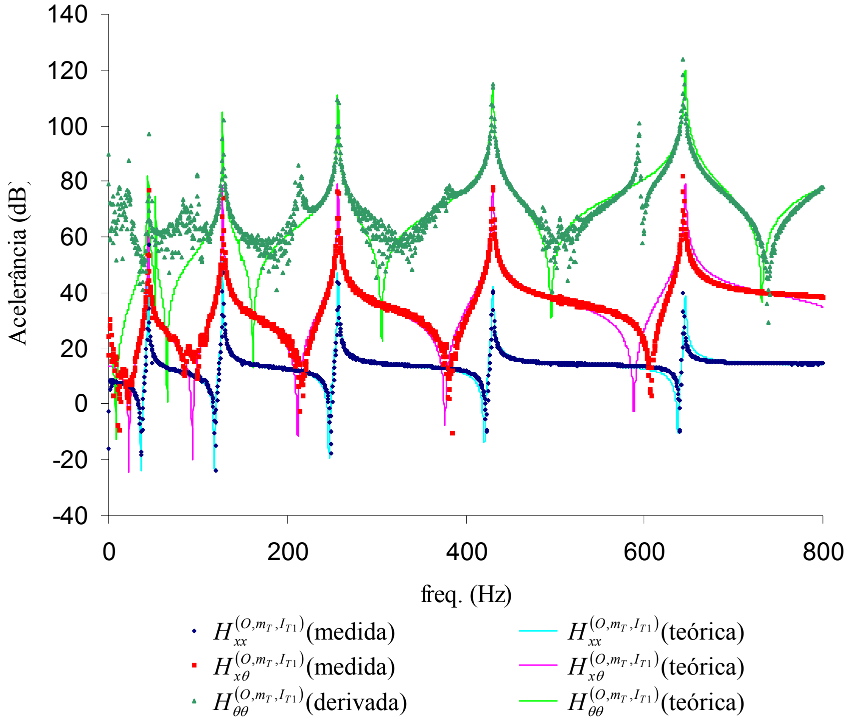


Fig. C.5 FRF's medidas, teóricas e derivadas para o sistema experimental 'T_1'.

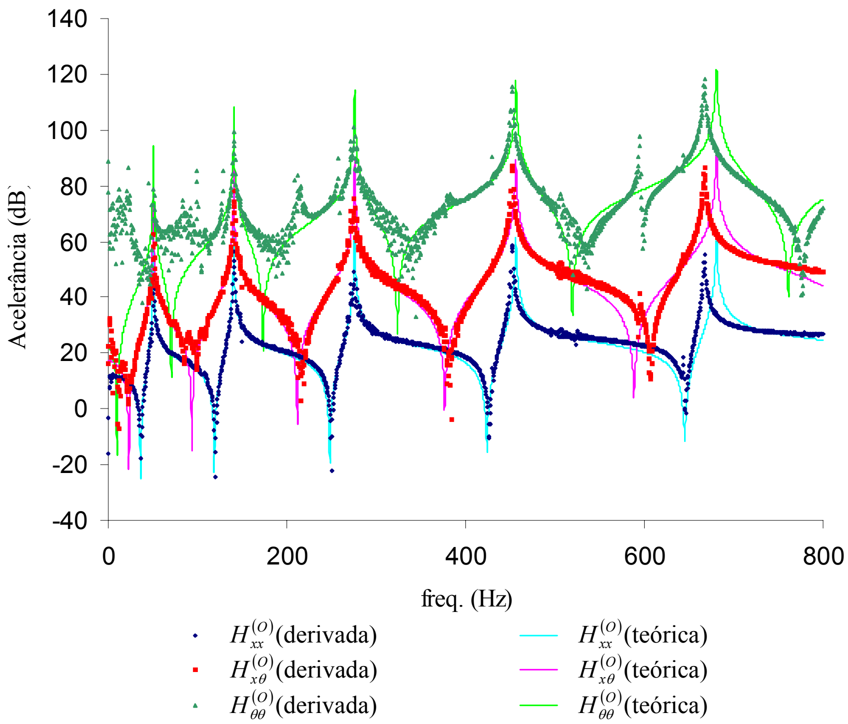


Fig. C.6 FRF's derivadas e teóricas para o sistema 'O' (ordem de cancelamento: I_{T2}-I_{T1}, m_T, I_{T1}).

C.3 CANCELAMENTO NA ORDEM m_T, I_{T2}-I_{T1}, I_{T1}

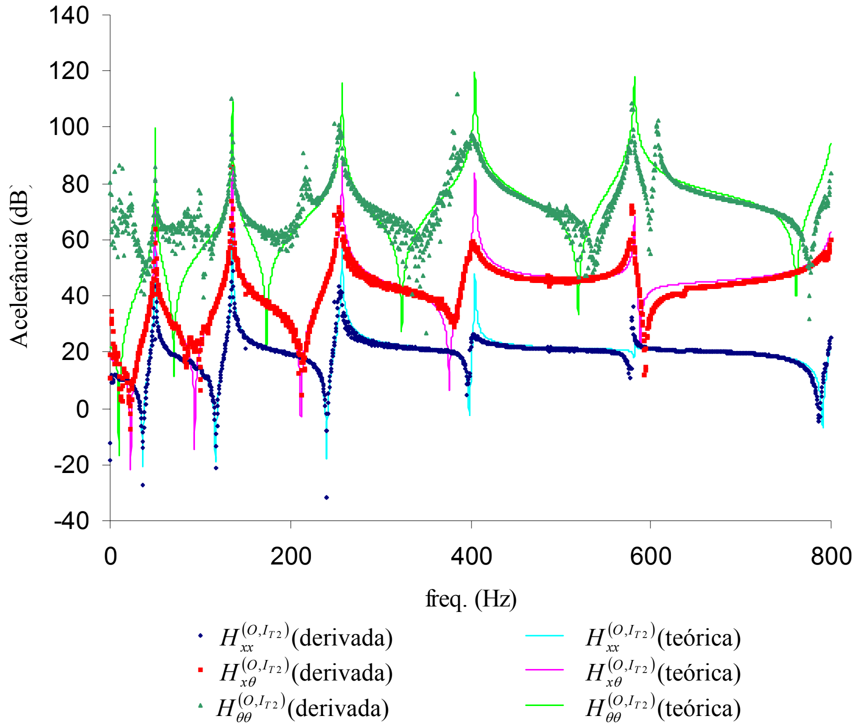


Fig. C.7 FRF's derivadas e teóricas para o sistema $O \oplus I_{T2}$.

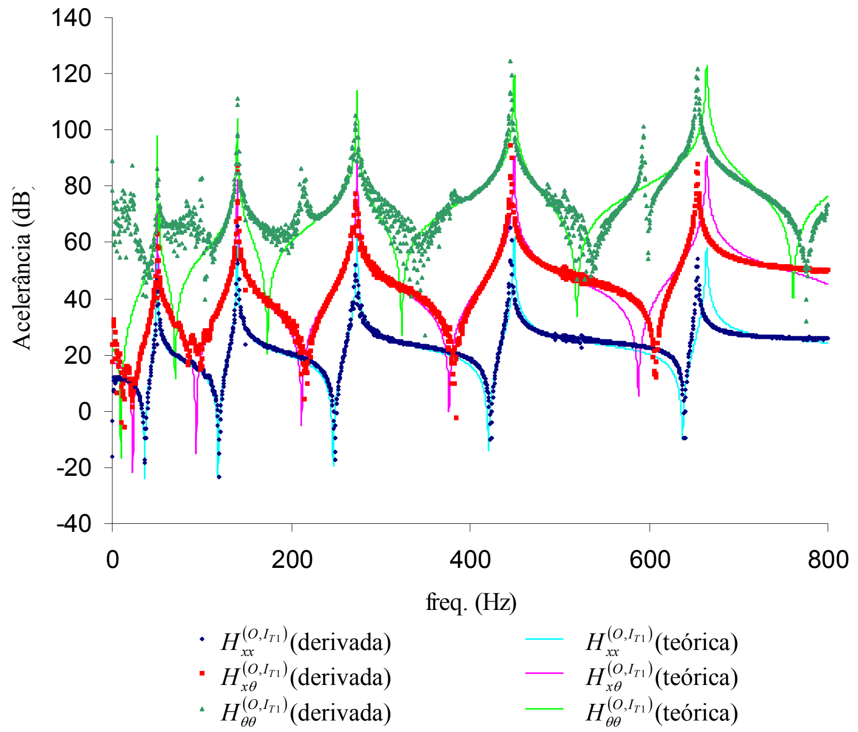


Fig. C.8 FRF's derivadas e teóricas para o sistema $O \oplus I_{T1}$.

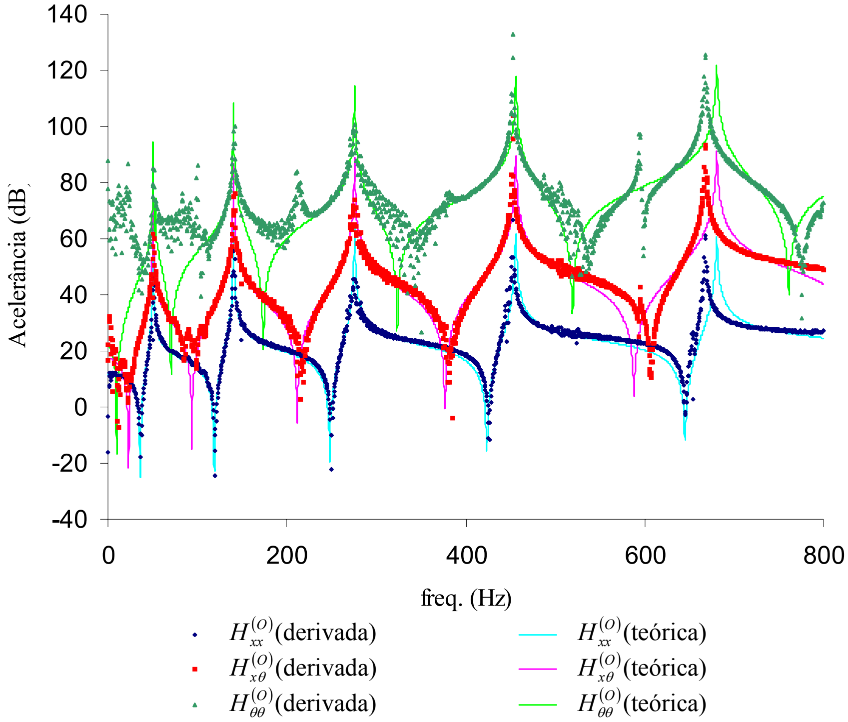


Fig. C.9 FRF's derivadas e teóricas para o sistema 'O' (ordem de cancelamento: m_T, I_{T2}-I_{T1}, I_{T1}).

ANEXO D RESULTADOS OBTIDOS POR IDENTIFICAÇÃO MODAL

D.1 CANCELAMENTO NA ORDEM I_{T2}-I_{T1}, m_T, I_{T1}

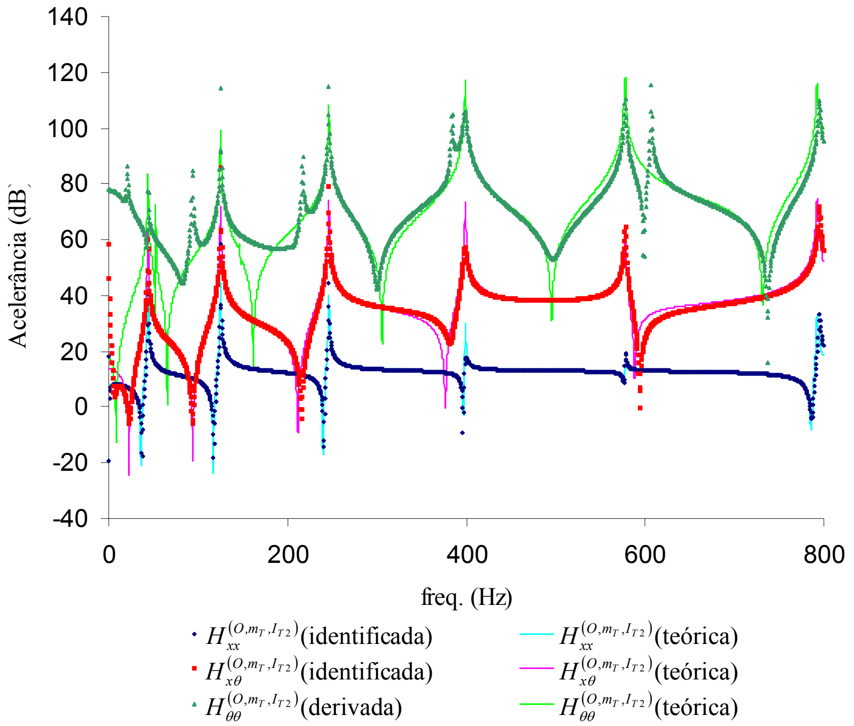


Fig. D.1 FRF's identificadas, teóricas e derivadas para o sistema experimental 'T_2'.

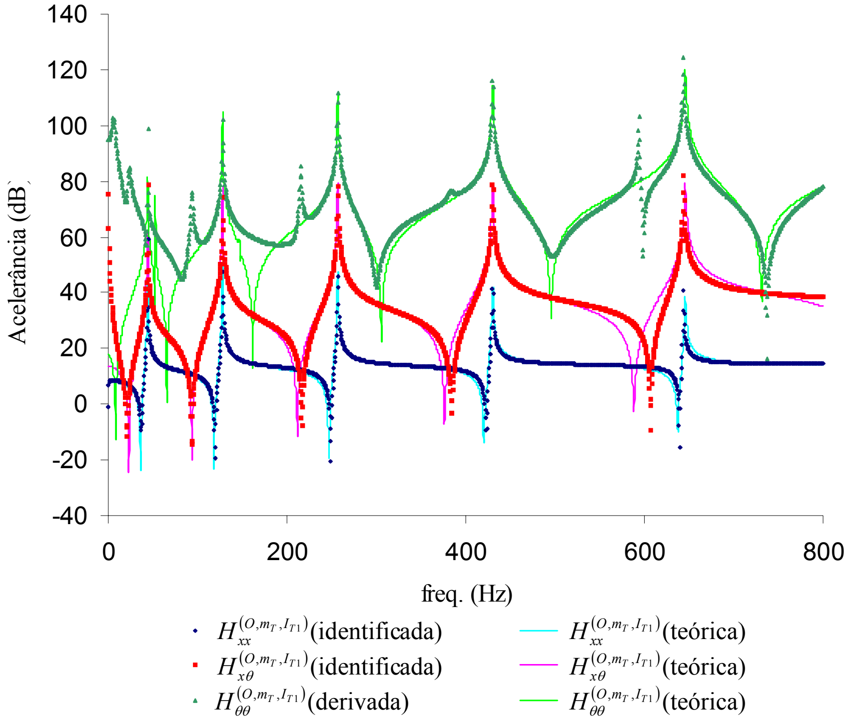


Fig. D.2 FRF's identificadas, teóricas e derivadas para o sistema experimental 'T_1'.

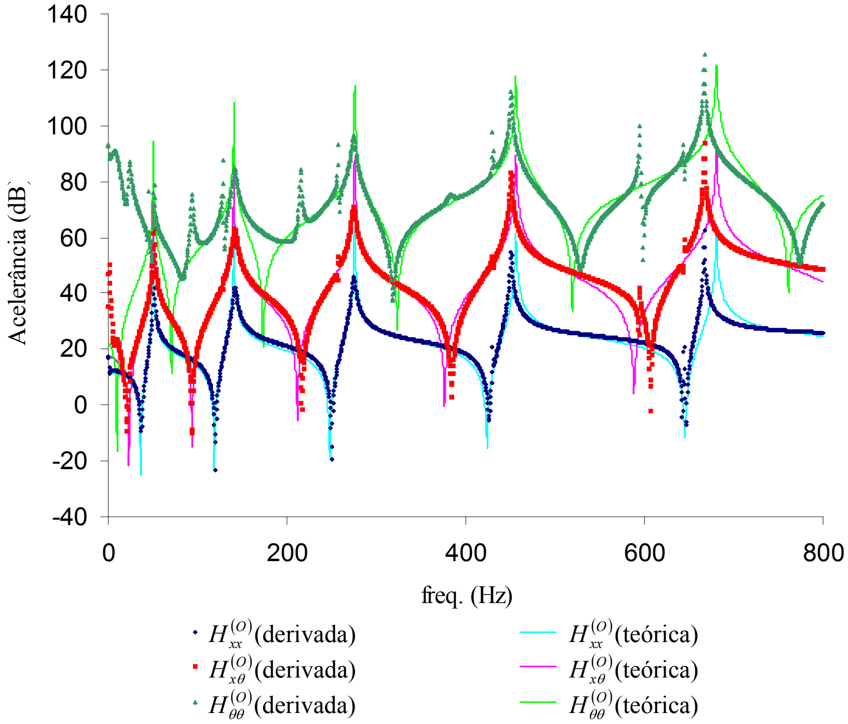


Fig. D.3 FRF's derivadas e teóricas para a viga 'O' (ordem de cancelamento: I_{T2}-I_{T1}, m_T, I_{T1}).

D.2 CANCELAMENTO NA ORDEM m_T, I_{T2}-I_{T1}, I_{T1}

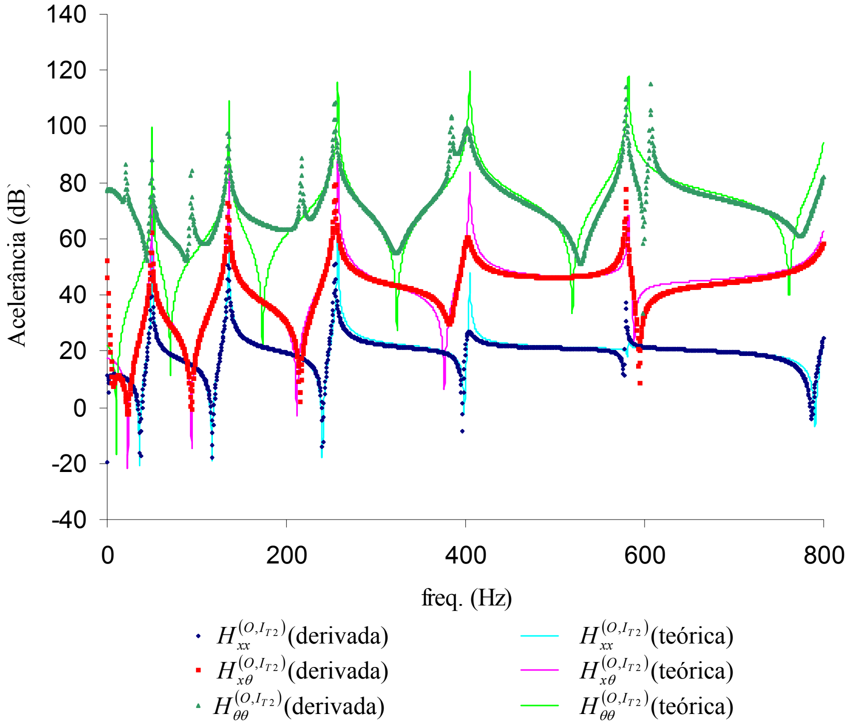


Fig. D.4 FRF's derivadas e teóricas para o sistema $O \oplus I_{T2}$.

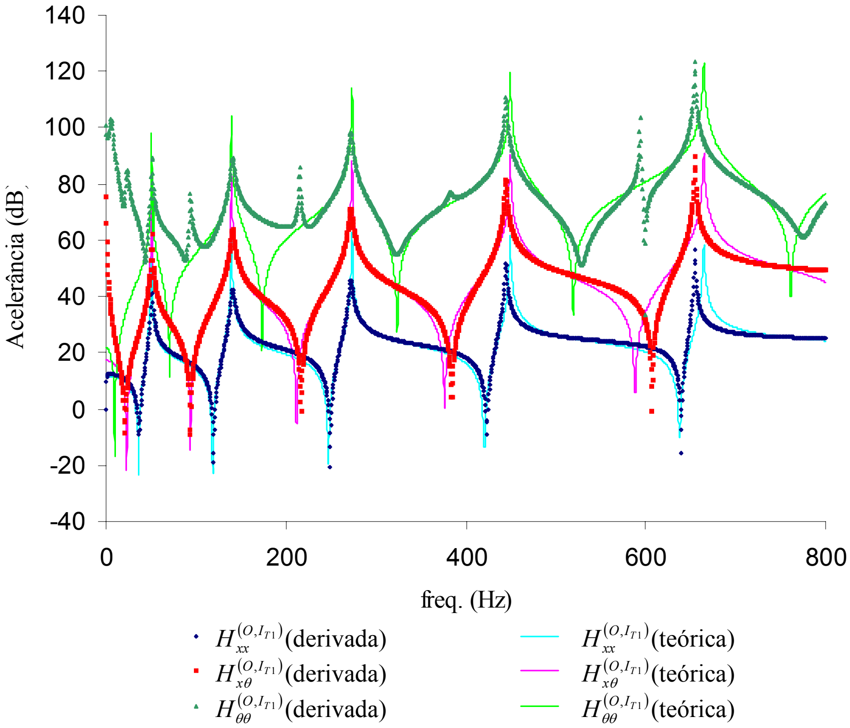


Fig. D.5 FRF's derivadas e teóricas para o sistema $O \oplus I_{T1}$.

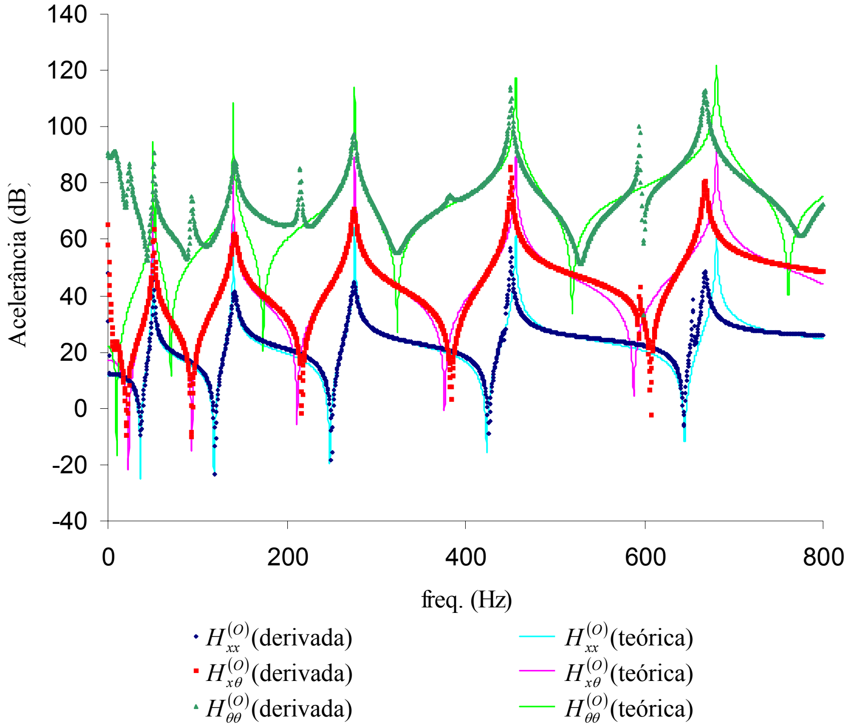


Fig. D.6 FRF's derivadas e teóricas para o sistema 'O' (ordem de cancelamento: m_T, I_{T2}-I_{T1}, I_{T1}).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Billah, K. Y., Scanlan, R. H., “Resonance, Tacoma Narrows Bridge Failure and Undergraduate Physics Textbooks”, *American Journal of Physics*, vol. 59, nº 2, 1991.

[2] Rao, S. S., “Mechanical Vibrations”, *Addison-Wesley*, 1995.

[3] Silva, P., “Caracterização Dinâmica de Juntas por Análise de Subestruturas”, *Dissertação para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Mecânica*, Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa, Portugal, 1999.

[4] Maia, N. M. M., Silva, J. M. M., “Theoretical and Experimental Modal Analysis”, *Research Studies Press Ltd.*, 1997.

[5] Varoto, P. S., Oliveira, L. P. R., Lofrano, M., “Techniques for the Estimation of Angular FRF in Modal Testing”, *Proc. of the International Conference on Structural Dynamics Modelling*, pp.71-79, Funchal, Madeira, Portugal, 2002.

[6] Ewins, D. J., Gleeson, P. T., “Experimental Determination of Multi Directional Mobility Data for Beams”, *The Shock and Vibration Bulletin*, vol. 45, nº5, pp. 153-173, 1975.

[7] D’Ambrogio, W., Sestieri, A., “Substructure Coupling using FRF’s: Strategies for Tackling Rotational Degrees of Freedom”, *Proc. of the International Conference on Structural Dynamics Modelling*, pp. 229-238, Funchal, Madeira, Portugal, 2002.

[8] Smiley, R. G., Brinkman, B. A., “Rotational Degrees of Freedom in Structural Modification”, *Proc. of the 2nd International Modal Analysis Conference (IMAC 2)*, vol. 2, pp. 937-939, Orlando, Florida, USA, 1984.

[9] Soyster, D. H., Trethewey, M. W., “Use of Rotational Elements in Structural Dynamic Modification”, *The International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis*, vol. 11, nº 1, pp. 76-82, 1996.

[10] Cafeo, J. A., Trethewey, M. W., Sommer, H. J., “Measurement and Application of Experimental Rotational Degrees of Freedom for Mode Shape Refinement”, *The International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis*, vol. 7, nº 4, pp. 255-269, 1992.

[11] Ribeiro, A. M. R., “Desenvolvimento de Técnicas de Análise Dinâmica Aplicáveis à Modificação Estrutural”, *Dissertação para obtenção do grau de Doutor em Engenharia Mecânica*, Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa, Portugal, 1999.

[12] Ewins, D. J., Sainsbury, M. G., “Mobility Measurements for the Vibration Analysis of Connected Structures”, *The Shock and Vibration Bulletin*, vol. 42, nº 1, pp. 105-122, 1972.

[13] Sainsbury, M. G., “Experimental and Theoretical Techniques for the Vibration Analysis of Damped Complex Structures”, *PhD Thesis*, Imperial College of Science and Technology, University of London, United Kingdom, 1976.

[14] Silva, J. M. M., “Measurements and Applications of Structural Mobility Data for the Vibration Analysis of Complex Structures”, *PhD Thesis*, Imperial College of Science and Technology, University of London, United Kingdom, 1978.

[15] Ewins, D. J., Silva, J. M. M., “Measurements of Structural Mobility on Helicopter Structures”, *Symposium on Internal Noise in Helicopters*, University of Southampton, United Kingdom, 1979.

[16] Gleeson, P. T., “Identification of Spatial Models for the Vibration Analysis of Lightly Damped Structures”, *PhD Thesis*, Imperial College of Science and Technology, University of London, United Kingdom, 1979.

[17] Bokelberg, E. H., Sommer III, H. J., Trethewey, M. W., “A Six-Degree-of-Freedom Laser Vibrometer, Part I: Theoretical Development”, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 178, nº 5, pp. 643-654, 1994.

[18] Bokelberg, E. H., Sommer III, H. J., Trethewey, M. W., “A Six-Degree-of-Freedom Laser Vibrometer, Part II: Experimental Validation”, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 178, nº 5, pp. 655-667, 1994.

[19] EU Contract BRPR-CT97-0540, Project number BE 97-4184, “Quantitative Treatment and Testing of Rotational Degrees of Freedom (QUATTRO): Guidelines for experimental techniques”, www.dem.ist.utl.pt/~QUATTRO/, 2000.

[20] Stanbridge, A. B., Ewins, D. J., “Using Continuous-Scan LDV Data for FE Model Validation in the Presence of ‘Close’ Modes”, *International Conference on Structural Dynamics Modelling*, pp. 267-276, Funchal, Madeira, Portugal, 2002.

[21] Zheng, W., Soucy, Y., “Application of a Multi-Channel Laser System on Modal Testing of Satellite Antenna Reflector”, *Proc. of the 15th International Modal Analysis Conference (IMAC XV)*, Orlando, Florida, USA, 1997.

[22] Castellini, P., Marchetti, B., Tomasini, E. P., “Scanning Laser Doppler Vibrometer for Dynamic Measurements on Small and Micro Systems”, *Proc. of the 5th International Conference on Vibration Measurements by Laser Techniques: Advances and Applications*, pp. 486-492, Ancona, Italy, 2002.

[23] Lee, K. M., Polycarpou, A. A., “Dynamic Microwaviness Measurements of Super Smooth Disk Media used in Magnetic Hard Disk Drives”, *Proc. of the 5th International Conference on Vibration Measurements by Laser Techniques: Advances and Applications*, pp. 493-504, Ancona, Italy, 2002.

[24] Schnitzer, R., Rümmler, N., Michel, B., “Laser-based Modal Analysis of Smart Electronic Structures”, *Proc. of the 5th International Conference on Vibration Measurements by Laser Techniques: Advances and Applications*, pp. 88-93, Ancona, Italy, 2002.

[25] Lawrence, E. M., "Laser Doppler Vibrometry for Optical MEMS", *Proc. of the 5th International Conference on Vibration Measurements by Laser Techniques: Advances and Applications*, pp. 80-87, Ancona, Italy, 2002.

[26] Rembe, C., Kant, R., Young, M. P., Muller, R. S., "Network-connected MEMS-Measuring System for High-speed Data Transfer to CAD and Simulation Tools", *Proc. of the 5th International Conference on Vibration Measurements by Laser Techniques: Advances and Applications*, pp. 94-102, Ancona, Italy, 2002.

[27] Decraemer, W. F. S., Khanna, S. M., Dirckx, J. J. J., "The Integration of Detailed 3-Dimensional Anatomical Data for the Quantitative Description of 3-Dimensional Vibration of a Biological Structure. An Illustration from the Middle Ear", *Proc. of the 5th International Conference on Vibration Measurements by Laser Techniques: Advances and Applications*, pp. 148-158, Ancona, Italy, 2002.

[28] Castellini, P., Huebner, R., Pinotti, M., "Vibration Measurement on Artificial Heart Valve by Laser Doppler Vibrometry", *Proc. of the 5th International Conference on Vibration Measurements by Laser Techniques: Advances and Applications*, pp. 159-167, Ancona, Italy, 2002.

[29] Revel, G. M., Scalise, A., Scalise, L., "Vibrational Analysis of Tendons Mechanical Properties", *Proc. of the 5th International Conference on Vibration Measurements by Laser Techniques: Advances and Applications*, pp. 168-178, Ancona, Italy, 2002.

[30] Smith, E. J., "Measurement of the Total Structural Mobility Matrix", *The Shock and Vibration Bulletin*, vol. 40, nº 7, pp. 51-84, 1969.

[31] Sanderson, M. A., Fredo, C. R., "Direct Measurement of Moment Mobility, Part I: A Theoretical Study", *Journal of Sound and Vibration*, vol. 179, nº 4, pp. 669-684, 1995.

[32] Sanderson, M. A., "Direct Measurement of Moment Mobility, Part II: An Experimental Study", *Journal of Sound and Vibration*, vol. 179, nº 4, pp. 685-696, 1995.

[33] Trethewey, W. M., Sommer III, H. J., "Measurement of Rotational DOF Frequency Response Functions with Pure Moment Excitation", *International Conference on Structural Dynamics Modelling*, pp. 81-88, Funchal, Madeira, Portugal, 2002.

[34] Cheng, L., Qu, Y. C., "Rotational Compliance Measurements of a Flexible Plane Structure Using an Attached Beam-like Tip, Part 1: Analysis and Numerical Simulation", *Journal of Vibration and Acoustics*, vol. 119, nº 4, pp. 596-602, 1997.

[35] Qu, Y. C., Cheng, L., Rancourt, D., "Rotational Compliance Measurements of a Flexible Plane Structure Using an Attached Beam-like Tip, Part 2: Experimental Study", *Journal of Vibration and Acoustics*, vol. 119, nº 4, pp. 603-608, 1997.

[36] Maia, N. M. M., Silva, J. M. S., Ribeiro, A. M. R., "Some Applications of Coupling/Uncoupling Techniques in structural Dynamics - Part 3: Estimation of Rotational Frequency-Response-Functions using MUM", *Proc. of the 15th*

International Modal Analysis Conference (IMAC XV), Orlando, Florida, USA, 1997.

[37] Silva, J. M. M., Maia, N. M. M., Ribeiro, A. M. R., "Estimation of Frequency Response Functions Involving Rotational DOF's using an Uncoupling Technique", *Proc. of the International Conference on Applications of Modal Analysis*, pp. 15-17, Gold Coast, Queensland, Australia, 1999.

[38] Maia, N. M. M., Silva, J. M. S., Ribeiro, A. M. R., "Some Applications of Coupling/Uncoupling Techniques in structural Dynamics - Part 2: Generation of the Whole FRF Matrix from Measurements on a Single Column - The Mass Uncoupling Method", *Proc. of the 15th International Modal Analysis Conference (IMAC XV)*, Orlando, Florida, USA, 1997.

[39] Silva, J. M. M., Maia, N. M. M., Ribeiro, A. M. R., "Cancellation of Mass-Loading Effects of Transducers and Evaluation of Unmeasured Frequency Response Functions", *Journal of Sound and Vibration*, vol. 236, nº 5, pp. 761-779, 2000.

[40] Mottershead, J. E., Kyprianou, A., Ouyang, H., "Estimation of Rotational Frequency Responses", *Proc. of the 5th International Conference on Damage Assessment of Structures (DAMAS 2003)*, *Transtech Publications*, pp. 157-165, Southampton, Reino Unido, 2003.

[41] Serridge. M., Licht, T. R., "Piezoelectric Accelerometers and Vibration Preamplifiers - Theory and Application Handbook", *Brüel & Kjær*, 1987.

[42] "Laser Vibrometer Basics", www.polytec.de/polytec-com/l_vib/vib_uni_vib.html, *Polytec*.

[43] Bauer, M., Ritter, F., Siegmund, G., "High-precision Laser Vibrometers based on Digital Doppler-signal Processing", *Proc. of the 5th International Conference on Vibration Measurements by Laser Techniques: Advances and Applications*, Ancona, Italy, pp. 50-61, 2002.

[44] National Communications System, Technology & Standards Division, "Telecommunications: Glossary of Telecommunication Terms", Fed-Std-1037C, *General Services Administration, Information Technology Service*, 1996.

[45] "Laser Vibrometer User Manual - Controller OFV-2802; Sensor Head OFV-508", *Polytec*.

[46] Usuda, T., Furuta, E., Ohta, A., Nakano, H., "Development of Laser Interferometer for a Sine-approximation Method", *Proc. of the 5th International Conference on Vibration Measurements by Laser Techniques: Advances and Applications*, pp. 29-36, Ancona, Italy, 2002.

[47] Martens, H. J., Link, A., Schlaak, H. J., Täubner, A., Wabinski, W., Weiβenborn, C., "Investigations to Assess the Best Accuracy Attainable in Accelerometer Calibrations", *Proc. of the 5th International Conference on Vibration Measurements by Laser Techniques: Advances and Applications*, pp. 258-276, Ancona, Italy, 2002.

[48] Henrique, L., "Acústica Musical", *Fundação Calouste Gulbenkian*, 2002.

[49] Pina, H., "Métodos Numéricos", *McGraw-Hill*, 1995.

[50] Manual do PULSE Labshop, versão 6.1.5.65, *Brüel & Kjær*, 2002.

[51] Afolabi, D., "An Anti-Resonance Technique for Detecting Structural Damage", *Proc. of the 5th International Modal Analysis Conference (IMAC V)*, pp. 491-495, Londron, United Kingdom, 1987.

[52] Ewins, D. J., "Modal Testing: Theory and Practice", *Research Studies Press Ltd.,* 1984.

[53] Duarte, M. L. M., "Experimentally-derived Structural Models for use in further Dynamic Analysis", *PhD Thesis*, Imperial College of Science, Technology and Medicine, University of London, United Kingdom, 1996.

[54] Henderson, H. V., Searle, S. R., "On Deriving of the Inverse of a Sum of Matrices", *SIAM Review,* vol. 23, nº 1, 1981.

[55] Skingle, G. W., "Structural Dynamic Modification Using Experimental Data", *PhD Thesis*, Imperial College of Science, Technology and Medicine, University of London, United Kingdom, 1989.

[56] Maia, N. M. M., Silva, J. M. S., Ribeiro, A. M. R., "Some Applications of Coupling/Uncoupling Techniques in structural Dynamics - Part 1: Solving the Mass Cancellation Problem", *Proc. of the 15th International Modal Analysis Conference (IMACXV)*, Orlando, Florida, EUA, 1997.

[57] Vincent, A. H., "A Note on the Properties of the Variation of Structrual Response with respect to a Single Structural parameter when plotted in the Complex Plane", *Dynamics Department Report GEN/DYN/RES/010R*, *Westland Helicopters Ltd*, 1973.

[58] Duarte, M. L., Ewins, D. J., "Rotational Degrees of Freedom for Structural Coupling Analysis via Finite-Difference Technique with Residual Compensation", *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 14, nº 2, pp. 205-227, 2000.

[59] Silva, J. M. M., Maia, N. M. M., "Vibrações e Ruído - Sebenta", *Secção de Folhas da AEIST*, 1997.

[60] Silva, J. M. M., "The Influence of the Joint on the Vibration Response of a Cross-Beam Assembly", *MSc Thesis,* Imperial College of Science and Technology, University of London, United Kingdom, 1974.

[61] Penny, J. E. T., Friswell, M. I., Garvey, S. D., "Automatic Choice of Measuremnet Locations for Dynamic Testing", *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, vol. 32, nº 2, pp. 407-414, 1994.

[62] Cowper, G. R., "The Shear Coefficient in Timoshenko's Beam Theory", *Journal of Applied Mechanics,* vol. 335, 1966.